Colle n° 26 semaine du 13/05 au 18/05

Intégration

1. **Fonctions en escalier**
   Définition d'une subdivision de $[a, b]$, d'une fonction en escalier sur $[a, b]$, puis de son intégrale sur $[a, b]$.
2. **Intégrale d'une fonction continue sur un segment**
   — Principe de la définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$ à l'aide des fonctions en escalier. On admet les propriétés suivantes de cette intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
   — Définition de la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a, b]$: si f est continue, cette valeur est atteinte par f sur $[a, b]$. Inégalité triangulaire pour les intégrales.
   — Si f est continue et de signe constant sur $[a, b]$, et d'intégrale nulle sur $[a, b]$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
3. **Sommes de Riemann** :
   si f est continue sur $[a, b]$, $\displaystyle \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$; preuve dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Application à des calculs de limites de suites.
4. **Calcul intégral**
   — Si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, $\displaystyle x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   — Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (admise), qui implique la formule de Taylor-Young.
5. **Extension aux fonctions à valeurs complexes**
   Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes : définition par les parties réelles et imaginaires, linéarité, relation de Chasles. L'inégalité triangulaire et celle de Taylor-Lagrange restent vraies avec des modules.

Séries numériques

1. **Généralités**
   — Définition d'une série à termes réels ou complexes, des sommes partielles, de la convergence d'une série, des restes d'une série convergente. Cas des séries géométriques : CNS de convergence, calcul de la somme.
   — Opérations sur les séries (multiplication par un scalaire et somme). Linéarité de la somme.
   — Si la série $\sum u_n$ converge, nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.
   — Séries télescopiques : définition, CNS de convergence et calcul de la somme en cas de convergence.
2. **Séries à termes réels positifs**
   — Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
   — Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : comparaisons par inégalités (à partir d'un certain rang), par négligeabilité ou par équivalence.
   — Séries de Riemann : définition, convergence.
3. **Séries absolument convergentes**
   Définition de la convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente. La réciproque est fausse : contre-exemples avec des séries alternées.

Questions de cours envisageables

1. Si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. .
2. Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
3. Si une série **à termes réels** convergence absolument, alors elle converge.