PCSI, Mathématiques, 2023-2024

Colle n° 27 semaine du 20/05 au 25/05

Séries numériques

1. **Généralités**
   - Définition d'une série à termes réels ou complexes, des sommes partielles, de la convergence d'une série, des restes d'une série convergente. Cas des séries géométriques : CNS de convergence, calcul de la somme.
   - Opérations sur les séries (multiplication par un scalaire et somme). Linéarité de la somme.
   - Si la série $\sum u_n$ converge, nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.
   - Séries télescopiques : définition, CNS de convergence et calcul de la somme en cas de convergence.
2. **Séries à termes réels positifs**
   - Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
   - Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : comparaisons par inégalités (à partir d'un certain rang), par négligeabilité ou par équivalence.
   - Séries de Riemann : définition, convergence.
3. **Séries absolument convergentes**

   Définition de la convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente. La réciproque est fausse : contre-exemples avec des séries alternées.

Combinatoire

1. **Définition et propriétés du cardinal**
   - Définition d'un ensemble fini, de son cardinal. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.
   - Cardinaux du complémentaire d'une partie, d'une réunion de deux ensembles, d'une réunion de p ensembles finis disjoints deux à deux. Calcul du cardinal d'un ensemble E en passant par une partition.
   - Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis ($p \geqslant 2$). Applications : $\mathsf{card}\,(\mathcal{A}(F,E)) = n^p$ si $\mathsf{card}\,(E) = n$ et $\mathsf{card}\,(F) = p$, $\mathsf{card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
2. **Listes sans répétition d'un ensemble E à n éléments**
   - Nombre de $p-$listes sans répétition lorsque $p \leqslant n$ (notation A_n^p).
     Cas $n = p$: nombre de permutations de E.
   - Nombre de parties à p éléments d'un ensemble E de cardinal n, appelées aussi p-combinaisons de E.

Probabilités

1. **Univers, évènements, variables aléatoires**
   - Expérience aléatoire, issues de l'expérience. L'ensemble des issues est appelé univers. On se limite à des univers finis. Evènements, évènements élémentaires, incompatibles, système complet d'évènements.
   - Définition d'une variable aléatoire finie X (définie sur un univers fini Ω), notations $X(\Omega)$, $\{X \in A\}$ pour $A \subset \Omega$.
2. **Probabilités sur un univers fini**
   - Définition d'une probabilité P sur un univers fini Ω : (Ω, P) est alors appelé espace probabilisé fini. Exemples, dont la probabilité uniforme. Caractérisation d'une probabilité sur Ω par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
   - Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux évènements, de l'évènement contraire, croissance.
   - Définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_B(A)$, pour B tel que $P(B) > 0$. L'application P_B est une probabilité sur Ω (et aussi sur B).
   - Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
   - Formule de Bayes simple, puis générale (pour un système complet d'évènements de probabilités non nulles).

Questions de cours envisageables

1. Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
2. Cardinaux de $\mathcal{A}(F,E)$ et de $\mathcal{P}(E)$.
3. Formule des probabilités composées.