Colle n° 28 semaine du 27/05 au 01/06

Combinatoire

1. **Définition et propriétés du cardinal**
   - Définition d'un ensemble fini, de son cardinal. Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.
   - Cardinaux du complémentaire d'une partie, d'une réunion de deux ensembles, d'une réunion de p ensembles finis disjoints deux à deux. Calcul du cardinal d'un ensemble E en passant par une partition.
   - Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis ($p \geqslant 2$). Applications : $\mathsf{card}\,(\mathcal{A}(F,E)) = n^p$ si $\mathsf{card}\,(E) = n$ et $\mathsf{card}\,(F) = p$, $\mathsf{card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.
2. **Listes sans répétition et combinaisons d'un ensemble E à n éléments**
   - Nombre de $p-$listes sans répétition lorsque $p \leqslant n$ (notation A_n^p).
     Cas $n = p$: nombre de permutations de E.
   - Nombre de parties à p éléments d'un ensemble E de cardinal n, appelées aussi p-combinaisons de E.

Probabilités

1. **Univers, évènements, variables aléatoires**
   - Expérience aléatoire, issues de l'expérience. L'ensemble des issues est appelé univers. On se limite à des univers finis. Evènements, évènements élémentaires, incompatibles, système complet d'évènements.
   - Définition d'une variable aléatoire finie X (définie sur un univers fini Ω), notations $X(\Omega)$, $\{X \in A\}$ pour $A \subset \Omega$.
2. **Probabilités sur un univers fini**
   - Définition d'une probabilité P sur un univers fini Ω : (Ω, P) est alors appelé espace probabilisé fini. Exemples, dont la probabilité uniforme. Caractérisation d'une probabilité sur Ω par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
   - Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux évènements, de l'évènement contraire, croissance.
   - Définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_B(A)$, pour B tel que $P(B) > 0$. L'application P_B est une probabilité sur Ω (et aussi sur B).
   - Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
   - Formule de Bayes simple, puis générale (pour un système complet d'évènements de probabilités non nulles).
3. **Loi d'une variable aléatoire**
   - Définition de la loi de X, notée P_X, déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.
   - Lois usuelles : Bernoulli, binomiale et uniforme sur un ensemble fini.
4. **Indépendance d'évènements**
   - Couple (A, B) d'évènements indépendants. Si (A, B) sont indépendants, alors $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ le sont aussi.
   - Famille finie d'évènements $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ mutuellement indépendants. L'indépendance des A_i deux à deux n'implique pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.
5. **Couple de variables aléatoires**
   - Couple (X, Y) de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales. Variables indépendantes.
   - Indépendance mutuelle d'une famille finie de variables aléatoires. Lemme des coalitions : si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \cdots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \cdots, X_n)$ sont indépendantes (admis).
6. **Espérance d'une variable réelle**
   - Espérance d'une variable aléatoire réelle (ou complexe) : définition, propriétés, calcul pour la loi binomiale.
   - Théorème de transfert pour le calcul de $E(f(X))$ ou de $E(g(X, Y))$ (preuves admises). Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Questions de cours envisageables

1. Formule des probabilités composées.
2. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.
3. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.