# Colle n° 29 semaine du 03/06 au 08/06

## Probabilités

1. **Loi d'une variable aléatoire**
   - Définition de la loi de $X$, notée $P_X$, déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$.
   - Lois usuelles ; Bernoulli, binomiale et uniforme sur un ensemble fini.
2. **Indépendance d'évènements**
   - Couple $(A, B)$ d'évènements indépendants. Si $(A, B)$ sont indépendants, alors $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ le sont aussi.
   - Famille finie d'évènements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ mutuellement indépendants. L'indépendance des $A_i$ deux à deux n'implique pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.
3. **Couple de variables aléatoires**
   - Couple $(X, Y)$ de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales. Variables indépendantes.
   - Indépendance mutuelle d'une famille finie de variables aléatoires. Lemme des coalitions : si $(X_1, \cdots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \cdots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \cdots, X_n)$ sont indépendantes (admis).
4. **Espérance et variance**
   - Espérance d'une variable aléatoire réelle (ou complexe) : définition, propriétés, calcul pour la loi binomiale.
   - Théorème de transfert pour le calcul de $E(f(X))$ ou de $E(g(X, Y))$ (preuves admises). Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
   - Définition de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire réelle $X$, de son écart type. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Calcul de la variance pour la loi binomiale, $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Définition de la covariance de deux variables aléatoires. Variance de la somme de deux variables aléatoires.

## Matrices

Dans tout ce qui suit, $E$ (resp. $F$) désigne un $K-$espace vectoriel de dimension $p$ (resp. $n$), muni d'une base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$).

- Matrice d'un vecteur $x$ de $F$ dans la base $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F}}(x)$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(K)$). Matrice d'une famille finie $\mathcal{B}$ de $p$ vecteurs de $F$ dans la base $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$).
- Matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$. $f \mapsto M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Application linéaire de $K^p$ dans $K^n$ canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.
- Expression matricielle de $f$ : si $x \in E$ a pour matrice $X$ dans $\mathcal{E}$, alors $f(x)$ a pour matrice $AX$ dans $\mathcal{F}$, en notant $A = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$. Matrice de la composée de deux applications linéaires.
- Si $n = p$, $f$ est un isomorphisme si et seulement si $M = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f^{-1}) = M^{-1}$.
- Matrice d'un endomorphisme de $E$ dans une base $\mathcal{E}$ : on note $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}(f)$.

## Questions de cours envisageables

1. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.
2. Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, $f$ est un isomorphisme si et seulement si $M = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f^{-1}) = M^{-1}$.