Colle n° 30 semaine du 10/06 au 15/06

Fin des probabilités (variance)

— Définition de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire réelle X, de son écart type. Formule de Kœnig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Calcul de la variance pour la loi binomiale, $V(aX+b) = a^2V(X)$. Définition de la covariance de deux variables aléatoires. Variance de la somme de deux variables aléatoires.
— Inégalités de Markov et de Bienaymé Tchebychev.

Matrices

Dans tout ce qui suit, E (resp. F) désigne un $K-$espace vectoriel de dimension p (resp. n), muni d'une base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$).

1. **Matrices et applications linéaires**
   — Matrice d'un vecteur x de F dans la base $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F}}(x)$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(K)$). Matrice d'une famille finie $\mathcal{B}$ de p vecteurs de F dans la base $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ (qui appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(K)$).
   — Matrice de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, notée $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$. $f \mapsto M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Application linéaire de K^p dans K^n canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.
   — Expression matricielle de f : si $x \in E$ a pour matrice X dans $\mathcal{E}$, alors $f(x)$ a pour matrice AX dans $\mathcal{F}$, en notant $A = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$. Matrice de la composée de deux applications linéaires.
   — Si $n = p$, f est un isomorphisme si et seulement si $M = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f^{-1}) = M^{-1}$.
   — Matrice d'un endomorphisme de E dans une base $\mathcal{E}$: on note $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}(f)$.
2. **Noyau, image et rang d'une matrice**
   — Le noyau, l'image et le rang d'une matrice sont le noyau, l'image et le rang de l'application linéaire canoniquement associée.
   — Théorème du rang, caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang. Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible. Les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) conservent le noyau (resp. l'image). En particulier toutes les opérations élémentaires conservent le rang.
3. **Changements de bases**
   — Si $\mathcal{E}'$ est une famille de p vecteurs de E, c'est une base de E si et seulement si $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$ est inversible.
   — Dans ce cas, la matrice $M_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}')$ est appelée matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$. On la note $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$, on peut donc écrire $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(Id_E)$. De plus son inverse est : $(P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1} = P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$.
   — Formules de changement de bases pour la matrice d'un vecteur, pour la matrice d'un endomorphisme dans une base, puis pour la matrice d'une application linéaire dans des bases.
4. **Systèmes linéaires**
   — Rang d'un système, dimension de l'espace des solutions du système homogène associé en fonction du rang. Caractérisation de la compatibilité à l'aide de l'image de la matrice du système.
   — Systèmes de Cramer.

Questions de cours envisageables

1. Formule de Kœnig-Huygens pour la variance.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$, f est un isomorphisme si et seulement si $M = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f^{-1}) = M^{-1}$.
3. Conservation du noyau (resp. de l'image) par les opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes).