

## Calculs algébriques, trigonométrie, nombres complexes

### 1. Systèmes linéaires de petites tailles

Résolution de systèmes linéaires à coefficients réels de 2 ou 3 équations à 2 ou 3 inconnues, avec des opérations élémentaires sur les lignes.

### 2. Sommes et produits

— Notations  $\sum_{k=p}^n x_k$ ,  $\prod_{k=p}^n x_k$ , où  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels,  $p, n$  deux entiers avec  $0 \leq p \leq n$ . Règles de calcul, décalages d'indices et télescopes.

— Somme des  $n$  premiers entiers, généralisation à la somme des termes successifs d'une suite arithmétique. Expression simplifiée de  $\sum_{k=1}^n k^2$ .

— Somme des termes successifs d'une suite géométrique, application à la factorisation de  $a^n - b^n$  pour  $a, b$  réels et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

— Rappels sur la factorielle et les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$ . Calcul pratique pour des petites valeurs de  $k$ . Propriété de symétrie, formule et triangle de Pascal. Formule du binôme (admise).

### 3. Inégalités

Règles de calcul pour la relation d'ordre  $\leq$  sur  $\mathbb{R}$  : compatibilité avec les opérations usuelles.

Valeur absolue, inégalité triangulaire. Inéquations définies par des valeurs absolues ou des trinômes du second degré.

### 4. Trigonométrie

— Cercle trigonométrique, paramétrisation par cosinus et sinus, valeurs pour les angles usuels. Relation de congruence modulo  $2\pi$ .

Cosinus et sinus de  $\pi \pm x$ , de  $\frac{\pi}{2} \pm x$  (par dessins sur le cercle trigonométrique).

— Formules d'addition pour  $\cos(a+b)$  et  $\sin(a+b)$ , avec preuve géométrique pour la seconde.

Applications : formules de duplication et formules de transformation de produits de cos, sin en sommes.

— Propriétés et graphes des fonctions cos et sin, preuve de  $\cos' = -\sin$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin x| \leq |x|$  (preuve géométrique lorsque  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ).

— Fonction tangente : définition, imparité,  $\pi$ -périodicité, dérivée, variations, représentation graphique.

### 5. Nombres complexes

— Définition de  $\mathbb{C}$ , parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, opérations usuelles : addition, multiplication, division. Interprétation géométrique des nombres complexes.

— Conjugué et module d'un nombre complexe, propriétés, interprétation du module en termes de distances. Inégalité triangulaire pour le module.

— Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe. Arguments d'un nombre complexe non nul. Définition et propriétés de  $e^{i\theta}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , application aux calculs sur les arguments (produits, quotients).

— Formules de factorisation par l'angle moitié pour  $e^{ix} \pm e^{iy}$ . Application en trigonométrie : formules de transformation de sommes en produits.

— Formules d'Euler et de Moivre. Application : linéarisation d'une puissance de cos ou sin.

## Questions de cours envisageables

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin x| \leq |x|$ .
2. Inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$ .
3. Formules de factorisation par l'angle moitié pour  $e^{ix} \pm e^{iy}$