PCSI, Mathématiques, 2024-2025

Colle n° 7, semaine du 12/11 au 16/11

Primitives

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle I.
2. Primitives des fonctions usuelles, des dérivées composées.
3. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle : si f est continue sur I et $a \in I$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a (admis). Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.
4. Intégration par parties, changement de variable. Application à la recherche de primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

Equations différentielles linéaires

1. **Equations différentielles linéaires d'ordre un**
   (équations de la forme $y' + a(x)y = b(x)$, avec a, b fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
   - Résolution de l'équation homogène associée $y' + a(x)y = 0$.
   - Description de l'ensemble des solutions à l'aide d'une solution particulière.
   - Recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante.
   - Problème de Cauchy d'ordre un.
2. **Equations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants**
   - Résolution des équations homogènes $y'' + ay' + by = 0$: solutions complexes lorsque a, b sont complexes, réelles lorsque a, b sont réels.
   - Structure des solutions de $y'' + ay' + by = f(x)$ avec f continue de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   - Forme d'une solution particulière lorsque $f(x) = Ce^{\lambda x}$ où C, λ sont des constantes réelles ou complexes. Passage sur $\mathbb{C}$ pour des équations à coefficients réels et un second membre de la forme $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ avec B et ω réels.
     Utilisation du principe de superposition, lorsque le second membre est une somme de fonctions des types précédents.
   - Existence et unicité de la solution de $y'' + ay' + by = f(t)$ vérifiant les conditions $\left\{\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & k_1 \\ y'(t_0) & = & k_2 \end{array}\right.$ avec $t_0 \in I$, k_1, k_2 réels ou complexes fixés (admis).