PCSI, Mathématiques, 2024-2025

Colle n° 8, semaine du 18/11 au 23/11

Equations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants

- Résolution des équations homogènes $y'' + ay' + by = 0$: solutions complexes lorsque a, b sont complexes, réelles lorsque a, b sont réels.
- Structure des solutions de $y'' + ay' + by = f(x)$ avec f continue de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Forme d'une solution particulière lorsque $f(x) = Ce^{\lambda x}$ où C, λ sont des constantes réelles ou complexes.
  Passage sur $\mathbb{C}$ pour des équations à coefficients réels et un second membre de la forme $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ avec B et ω réels.
  Utilisation du principe de superposition, lorsque le second membre est une somme de fonctions des types précédents.
- Existence et unicité de la solution de $y'' + ay' + by = f(t)$ vérifiant les conditions $\left\{\begin{array}{rcl} y(t_0) & = & k_1 \\ y'(t_0) & = & k_2 \end{array}\right.$ avec $t_0 \in I$, k_1, k_2 réels ou complexes fixés (admis).

Suites réelles

1. **Nombres réels**
   Majorants, minorants d'une partie de $\mathbb{R}$, définition de la borne supérieure ou inférieure. Existence d'une borne supérieure (resp. inférieure) pour une partie non vide majorée (resp. minorée) (admis).
   Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ (admis).
2. **Généralités sur les suites**
   - Modes de définition d'une suite. Suites constantes, stationnaires. Monotonie d'une suite réelle, exemples d'étude. Suites réelles majorées, minorées, bornées.
   - Suites particulières : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre deux (formules admises dans ce dernier cas).
3. **Limite d'une suite réelle**
   - Définition d'une suite convergente, unicité de la limite (principe de la preuve).
   - Toute suite convergente est bornée (la réciproque est fausse).
   - Limites infinies.
   - Opérations sur les limites : limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites convergentes (avec une limite non nulle pour le dénominateur dans le dernier cas). Extension aux limites infinies, formes indéterminées.
   - Passage à la limite dans les inégalités larges. Limite d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Questions de cours envisageables

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge vers ℓ (resp. ℓ'), alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.
3. Limite d'une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$.