

Colle n° 10, semaine du 02/12 au 07/12

Suites numériques**1. Théorèmes d'existence d'une limite pour les suites réelles**

- Convergence d'une suite par encadrement (théorème des « gendarmes »). Le produit d'une suite de limite 0 et d'une suite bornée converge vers 0.
- Divergence d'une suite vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) par minoration (resp. majoration).
- Convergence des suites monotones.
- Définition de deux suites adjacentes. Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

2. Suites extraites

- Définition d'une suite extraite, exemples.
- Toute suite extraite d'une suite admettant une limite ℓ finie ou infinie admet la même limite. Application : preuve de la divergence d'une suite à l'aide d'une ou plusieurs suites extraites.

3. Suites à valeurs complexes

- Extension des définitions et résultats non liés à l'ordre aux suites complexes : suites convergentes, bornées, etc.
- Comportement des suites géométriques complexes selon la raison.
- Caractérisation de la convergence à l'aide des parties réelles et imaginaires.

Limites et continuité des fonctions

On considère des fonctions définies sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Limite en un point

- Limite finie en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($a \in D$ ou bien a est une extrémité de D). Exemples.

Cas des taux d'accroissements, exemple avec les limites usuelles des fonctions suivantes en 0 : $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$, $\frac{\tan x}{x}$. Application à la limite en 0 de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Propriétés : unicité de la limite ; si f a une limite finie en a , elle est bornée au voisinage de a .

- Limites infinies, limites à droite, à gauche.
- Opérations algébriques sur les limites, formes indéterminées usuelles.
- Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite (finie ou infinie) par encadrement. Limites de fonctions monotones.

2. Continuité en un point

- Définition de la continuité en un point $a \in D$. Continuité à droite, à gauche. Exemple de la partie entière.
- Prolongement par continuité de f en un point a extrémité de D , n'appartenant pas à D , lorsque f admet une limite finie en a .
- Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point, composition de fonctions continues.

3. Fonctions continues sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires. Cas particulier : si f est continue et change de signe sur un intervalle I , alors f s'annule sur I .
Image d'un segment par une fonction continue (admis).
- Théorème de la bijection continue : toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, dont la réciproque est continue et de même sens de variation (admis).

Questions de cours envisageables

1. Convergence d'une suite croissante majorée.
2. Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.
3. Convergence d'une suite géométrique complexe en fonction de sa raison.