

Colle n° 11, semaine du 09/12 au 14/12

Limites et continuité des fonctions

On considère des fonctions définies sur un domaine D inclus dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (sauf au dernier paragraphe).

1. Limite en un point

— Limite finie en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ($a \in D$ ou bien a est une extrémité de D). Exemples.

Cas des taux d'accroissements, exemple avec les limites usuelles des fonctions suivantes en 0 : $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x - 1}{x}$, $\frac{\ln(1+x)}{x}$

$\frac{\tan x}{x}$. Application à la limite en 0 de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Propriétés : unicité de la limite ; si f a une limite finie en a , elle est bornée au voisinage de a .

— Limites infinies, limites à droite, à gauche.

— Opérations algébriques sur les limites, formes indéterminées usuelles.

— Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'existence de limite (finie ou infinie) par encadrement. Limites de fonctions monotones.

2. Continuité en un point

— Définition de la continuité en un point $a \in D$. Continuité à droite, à gauche. Exemple de la partie entière.

— Prolongement par continuité de f en un point a extrémité de D , n'appartenant pas à D , lorsque f admet une limite finie en a .

— Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point.

3. Fonctions continues sur un intervalle

— Théorème des valeurs intermédiaires. Cas particulier : si f est continue et change de signe sur un intervalle I , alors f s'annule sur I . Image d'un segment par une fonction continue (admis).

— Théorème de la bijection continue : toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, dont la réciproque est continue et de même sens de variation (admis).

4. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Extension des notions de limites, continuité, fonctions bornées, etc. aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation d'une limite ou de la continuité à l'aide des parties réelles et imaginaires.

Dérivation**1. Dérivabilité en un point**

Rappels sur dérivabilité en un point, l'équation de la tangente au graphe. La dérivabilité implique la continuité. Dérivée à droite et à gauche en un point. Développement limité d'ordre 1 en un point.

2. Opérations sur les dérivées

Rappel sur les opérations : somme, produit, quotient et composition de fonctions dérivables, fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable (formules admises).

3. Fonctions dérivables sur un intervalle

— Extremum local en un point x_0 d'une fonction f dérivable sur un intervalle I : condition nécessaire sur $f'(x_0)$ si x_0 n'est pas une extrémité de I .

— Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, et inégalité des accroissements finis : si $|f'| \leq M$ sur un intervalle I , f est M -lipschitzienne sur I .

— Applications des accroissements finis : caractérisation de la monotonie sur un intervalle par le signe de la dérivée, théorème de la limite d'une dérivée : si f est continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que f' admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a , alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet la limite ℓ en a ; en particulier f est dérivable en a si ℓ est finie, avec $f'(a) = \ell$.

Questions de cours envisageables

1. Théorème des valeurs intermédiaires.
2. Théorème de Rolle.
3. Théorème de la limite d'une dérivée.