PCSI, Mathématiques, 2024-2025

Colle n° 19, semaine du 03/03 au 08/03

Développements limités et applications

1. **Développements limités**
   - Révisions du programme précédent.
   - DL à tout ordre au voisinage de 0 des fonctions suivantes : $\exp, \mathsf{ch}, \ \mathsf{sh}, \cos, \sin, x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
   - Par intégration terme à terme , on en déduit ceux de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de arctan au voisinage de 0.
   - Somme, produit, quotient de DL (résultats admis). Application : DL d'ordre 5 de tan au voisinage de 0.
2. **Applications des DL**
   - Recherche de limites et d'équivalents.
   - Etude locale d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: recherche de la tangente en un point et étude de la position locale de la courbe par rapport à sa tangente ; cas d'un point critique : condition suffisante pour l'existence d'un extremum local.
   - Recherche d'asymptotes en $\pm\infty$ et position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Espaces vectoriels

1. **Structure de K-espace vectoriel (K-ev), avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**
   - Définition d'un K-espace vectoriel, exemples de référence. Règles de calcul.
   - Combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs : définition, exemples.
2. **Sous-espaces vectoriels (ssev)**
   - Définition, caractérisation, exemples.
   - L'intersection de deux ssev est un ssev.
   - Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie $\mathcal{F} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de vecteurs : $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $e_1, \cdots, e_n$, c'est le plus petit ssev contenant $\mathcal{F}$.
     Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, alors $\mathsf{vect}(\mathcal{F}_1) \subset \mathsf{vect}(\mathcal{F}_2)$.
     $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n) = \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}) \Longleftrightarrow e_{n+1} \in \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
3. **Familles de vecteurs**
   - Famille génératrice, famille génératrice d'un ssev : définitions, exemples.
   - Famille liée, libre : définitions, cas d'une famille de deux vecteurs. Exemples dans K^n : lien avec la résolution d'un système homogène à n équations et p inconnues (nombre de vecteurs de la famille).

Questions de cours envisageables

1. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n) = \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}) \Longleftrightarrow e_{n+1} \in \mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$.
3. $\mathsf{vect}(e_1, \cdots, e_n)$ est un sous-espace vectoriel de E, le plus petit contenant $\{e_1, \cdots, e_n\}$.