Correction DM n°1

Exercice 1 : Montrer que la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos\left(ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{-x}+1}\right)\right)$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

On sait que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, la fonction exponentielle et la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$.
De plus on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^{2x}+1}{e^{-x}+1} > 0$$

On en déduit donc que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour calculer $f'(x)$, on peut voir que l'on a affaire à plusieurs fonctions composées, ainsi que la dérivée d'un quotient.

1$^{\text{ière}}$ étape :

On pose :

$$g: x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{e^{-x}+1}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{-x}+1) - (-e^{-x})(e^{2x}+1)}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}+3e^{x}+e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$$

2$^{\text{ième}}$ étape :

On pose :

$$h: x \mapsto ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{-x}+1}\right)$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2e^{2x}+3e^{x}+e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} \times \frac{e^{-x}+1}{e^{2x}+1} = \frac{2e^{2x}+3e^{x}+e^{-x}}{(e^{2x}+1)(e^{-x}+1)}$$

3$^{\text{ième}}$ étape :

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2e^{2x}+3e^{x}+e^{-x}}{(e^{2x}+1)(e^{-x}+1)} \times sin\left(ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{-x}+1}\right)\right)}$$

Exercice 2 : On pose la fonction $f(x) = e^{\ln^2(x)} = e^{(\ln(x))^2}$
Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ dans un intervalle à déterminer, et déterminer sa bijection réciproque.

Pour montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J, on peut montrer que f est monotone en calculant le signe de sa dérivée.

1$^{\text{ière}}$ étape :

On pose :

$$g: x \mapsto \ln^2(x)$$

On a alors :

$$\forall x \geq 1, g'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

2$^{\text{ième}}$ étape :

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 1, f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} e^{(\ln(x))^2}$$

De plus on sait que :

$$\forall x > 1, \ln(x) > 0 \Longrightarrow \forall x \geq 1, f'(x) > 0$$

Donc f est croissante sur $[1;+\infty[$.
On peut donc tracer le tableau de signe de $f'(x)$ et donc les variations de f sur $[1;+\infty[$. Dans un premier temps, ous allons calculer la limite de f en $+\infty$, par composée de fonctions.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \ln^2(x) = +\infty$$

De plus on a :

$$\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

Par composée on en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{(\ln(x))^2} = +\infty$$

Enfin on a :

$$f(1) = e^{\ln^2(1)} = 1$$

On a donc :

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$1 \nearrow +\infty$

Donc f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ dans $[1;+\infty[$.

Déterminons à présent sa bijection réciproque.
Soit $y \geq 1$. On résout :

$$e^{\ln^2(x)} = y \Longrightarrow \ln^2(x) = \ln(y)\ (car\ \ln(y) \geq 0) \Longrightarrow \ln(x) = \sqrt{\ln(y)}\ \ (car\ \ x \geq 1\ donc\ \ln(x) \geq 0) \Longrightarrow x = e^{\sqrt{\ln(y)}}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{f^{-1}: \begin{cases} [1;+\infty[\to [1;+\infty[\\ x \mapsto e^{\sqrt{\ln(x)}} \end{cases}}$$