Programme de Colle n°2
PCSI 2023-2024
(25 eu 29 septembre)

Inégalité dans ℝ

- Résolution d'inéquation avec des racines carrées
- Résolution d'inéquation avec des valeurs absolues (Inégalité triangulaire)
- Utiliser la monotonie d'une fonction pour démontrer une inéquation
- Démontrer la monotonie d'une fonction sans dérivation (ou avec dérivation)
- Majorant et minorant d'une partie de ℝ

Généralité sur les fonctions

- Ensemble de définition
- Graphe d'une fonction
- Limite et asymptotes horizontale et verticale
- Graphe d'une réciproque

Dérivation

- Dérivation des fonctions usuelles de première et terminale
- Dérivation d'une composée
- Dérivée n-ième
- Calcul de limite
- Equation de la tangente
- Monotonie

Fonctions usuelles

- Exponentielle
- Logarithme népérien
- Fonctions puissance (croissance comparée avec l'exponentielle et le logarithme)
- Fonctions trigonométriques et leur réciproque

Exercices du TD I,II,III, IV

Question de cours

Chapitre I :

- Inégalité triangulaire (sans démonstration) :

Propriété II.a.3 (Inégalité triangulaire sur ℝ) :

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2, \big||x|-|x'|\big| \leq |x+x'| \leq |x|+|x'|$$

Remarque : Les cas d'égalités seront traités dans le chapitre des complexes.

Chapitre III :

- **Exemple I.e.1** : On pose :

$$g: \begin{cases}]0;+\infty[\to]0;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Déterminer $g^{(n)}$ pour tout entier naturel non nul.

- **Proposition (Equation de la tangente) II.a.1** : Soit f une fonction dérivable en x=a. Alors l´équation de la tangente en x=a est donnée par :

$$(T_a): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Chapitre IV :

- Savoir les formules trigonométriques du type $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(a)\cos(b)$ *ou encore* $\sin(a) + \sin(b)$

On ne demande pas forcément aux étudiants de les connaitre par cœur, mais de savoir les retrouver en moins de trois minutes !

Exercices à savoir refaire

TD I :

- ***Application II.a.4*** : Démontrer que :

$$\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

- **Exercice B.1** : Démontrer les inégalités suivantes :

$$\text{a) }\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)\qquad \text{b)}\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$$

- **Exercice B6 du TD I** : 1) Démontrer que :

$$\forall\,x>0, x+\frac{1}{x}\geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\geq n^2$$

TD III :

- **Exercice C.1** : On pose :

$$\forall\,m\in\mathbb{R}, f_m:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x+m}{x^2+1}\end{cases}$$

On note C_m sa courbe représentative.
1) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 0 sont parallèles.
2) Montrer que les tangentes aux courbes C_m au point d'abscisse 1 sont concourantes.

- ***Application II.c.4*** : Démontrer que :

$$\forall\,x\geq 0, x\geq\sin(x)\geq x-\frac{x^3}{6}$$

TD IV :

- Résoudre $\cos(3x)+\sin(x)=0$

- Montrer que : $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$ après avoir préciser le domaine de validité.