

DM n°2
PCSI 2023-2024
Pour le 3 octobre

Exercice 1 : Un nombre particulier

Le but de cet exercice est de démontrer que l'équation

$$(E): e^x = \frac{1}{x}$$

Admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers cette solution.

1) Démontrer que:

$$e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0$$

Dans toute la suite de cet exercice on pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-x}$$

2) a) Déterminer les limites de f est $+\infty$ et $-\infty$.

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$, et donc l'équation (E), admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, noté α .

d) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0 ; \alpha]$.

3) On pose la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

a) Démontrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

b) Calculer $g'(x)$ et déduisez-en que la fonction g est croissante sur $[0 ; \alpha]$.

c) Montrer que :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha + 1}$$

4) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1+e^{u_n}} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

b) En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Remarque : On verra cette année que la suite (u_n) converge vers α ! C'est le théorème de passage à la limite :

$$\lim_n u_n = \ell = g(\ell)$$

Exercice 2 : Une suite de somme de sh

Soit p un entier naturel non nul. On pose :

$$\forall n \geq 2, S_n = \sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Partie A : Une inégalité

On veut démontrer dans cette partie que :

$$\forall x \in]0; 1[, 1+x \leq e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

1) Résoudre l'équation :

$$2\text{sh}(x) + 1 = 0$$

2) On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$$

3) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto e^{\text{sh}(x)} - 1 - x$

4) En déduire la double inégalité voulue.

Partie B : Limite de S_n

1) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket n; np \rrbracket, \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

3) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

Problème : Des fonctions hyperboliques

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \arctan(\text{sh}(x)) = \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)}\right)$$

Partie A : En utilisant la dérivation

1) On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\text{sh}(x)) \end{cases} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)}\right) \end{cases}$$

a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{ch}(x)} = g'(x)$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} \arctan(\text{sh}(x)) = \arctan\left(\frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)}\right)$$

Partie B : Grâce à la tangente

1) Rappeler le domaine de définition de la tangente, noté $\mathcal{D}_{\tan}$

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$$

b) Déterminer l'expression de $\tan(2f(x))$

3) a) Etudier la fonction :

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(x)} \end{cases}$$

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \in]-1; 1[$

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2g(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$

d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(2g(x)) = \text{sh}(x)$

e) En déduire le résultat voulu.

Partie C : Une application

1) a) Démontrer que

$$\text{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \text{sh}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Déterminer l'unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

3) Proposez une autre façon de déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.