Correction DM n°2

Exercice 1 : Un nombre particulier

Le but de cet exercice est de démontrer que l'équation

$$(E): e^x = \frac{1}{x}$$

Admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers cette solution.

1) Démontrer que:

$$e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0$$

Dans toute la suite de cet exercice on pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-x}$$

2) a) Déterminer les limites de f est $+\infty$ et $-\infty$.
b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
c) Déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$, et donc l'équation (E), admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, noté α.
d) Déterminer le signe de f(x) sur [0 ;α].
3) On pose la fonction définie sur [0 ;1] par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

a) Démontrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.
b) Calculer $g'(x)$ et déduisez-en que la fonction g est croissante sur [0 ;α].
c) Montrer que :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha + 1}$$

4) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+e^{u_n}} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
b) En déduire la convergence de la suite (u_n).
Remarque : On verra cette année que la suite (u_n) converge vers α ! C'est le théorème de passage à la limite :

$$\lim_n u_n = \ell = g(\ell)$$

1) On a :

$$e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0$$

Dans toute la suite de cet exercice on pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{-x}$$

2) On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x - e^{-x} = +\infty$$

De même :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x - e^{-x} = -\infty$$

b) _ f est une fonction dérivable comme somme de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x} > 0 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$$

On a donc :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
f	$-\infty$	-1	0	$+\infty$

c) _ f est :

- **continue**
- **strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
- **change de signe** car $\lim\limits_{x\to+\infty} x - e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x - e^{-x} = -\infty$

donc d'après le théorème des , il existe un unique x noté α tel que f(α) = 0.

d) On sait que f(0) = -1 < 0 donc on a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		
f	$-\infty$	-1	0	$+\infty$

Donc $f(x) \leq 0$ pour $x \in [0; \alpha]$.

3) On pose la fonction définie sur [0 ;1] par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = (e^x+1)x \;\Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e^x \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ (d'après I)a))}$$

b) _ g est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{e^x + 1 - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x(x - e^{-x})}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$$

Or on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc le signe de g'(x) est l'opposé du signe de f'(x) donc :

x	0	α
$f(x)$	$-$	
$g'(x)$	$+$	
g	$\frac{1}{2}$	$g(\alpha)=\alpha$

c) On sait que $g(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

On en déduit donc que :

$$\boxed{g(\alpha) = \frac{1+\alpha}{1+e^\alpha} = \frac{1+\alpha}{1+\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha+\alpha^2}{\alpha+1}}$$

4) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{u_0 = 0} \\ \mathbf{u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1+e^{u_n}} = g(u_n)} \end{cases}}$$

a) On pose la proposition suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P_n : "0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha"$$

Initialisation : On a :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = \frac{1+0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

Or on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}-2}{2\sqrt{e}} < 0$$

On a donc :

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \text{ car f est croissante sur } \mathbb{R}$$

On a donc :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$$

Donc P_0 vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie P_n. Donc :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

Comme g est croissante sur [0 ;α] alors :

$$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha)$$
$$=> \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha \text{ car } g(\alpha) = \alpha$$

Donc P_n est héréditaire.

Conclusion : P_o est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est toujours vraie.

b) (u_n) est croissante (d'après la question précédente, et (u_n) est majorée par α (toujours la question précédente), donc (un) converge vers un réel L tel que L∈[0,5 ; α].

Remarque : On verra cette année que l'on peut montrer que (u_n) converge vers α, par passage à la limite :

$$\frac{1+u_n}{1+e^{u_n}} = g(u_n) => g(L) = \frac{1+L}{1+e^L} => L = \alpha \text{ d'aprés la question 2) a)}$$

Exercice 2 : Une suite de somme de sh

Soit p un entier naturel non nul. On pose :

$$\forall\, n \geq 2, S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Partie A : Une inégalité

On veut démontrer dans cette partie que :

$$\forall\, x \in]0;1[, 1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

1) Résoudre l'équation :

$$2\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$$

2) On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x) \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 0$$

3) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - 1 - x$

4) En déduire la double inégalité voulue.

Partie B : Limite de S_n

1) Montrer que :

$$\forall\, n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, k \in [\![n; np]\!], \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall\, n \geq 2, \forall p \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

3) En déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$

Partie A

1) On a :

$$2\operatorname{sh}(x)+1=0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 1 = 0$$

On pose : $X = e^x$

On a alors :

$$X^2 + X - 1 = 0$$
$$\Delta = 5 > 0$$

Donc $X^2 + X - 1 = 0$ admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ X_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathbf{e^{2x} + e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

2) On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x) \end{cases}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(x)(2\operatorname{sh}(x)+1)$$

On sait que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) > 0$$

De plus d'après la question précédente on sait que :

$$2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Comme la fonction $x \longmapsto 2\operatorname{sh}(x) + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	$u(ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}))$	$\nearrow$	

Il reste à calculer :

$$u\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)+\underbrace{\mathrm{sh}\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}_{=-\frac{1}{2}}$$

On sait que :

$$2\mathrm{sh}(x)+1=0 \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

On a donc :

$$\mathrm{sh}\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

De plus on sait que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x)-sh^2(x)=1 \Longrightarrow \mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)-\frac{1}{4}=1 \Longrightarrow \mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\frac{5}{4}$$

On a donc :

$$\mathrm{ch}^2\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)+\mathrm{sh}\left(\ln\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

On a alors :

x	$-\infty$		$ln(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})$		$+\infty$
$w(x)$		$-$	0	$+$	
u		$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathbf{u(x)} \geq \mathbf{0}}$$

3) On pose f : $x \longmapsto e^{\mathrm{sh}(x)}-1-x$
f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x)=\mathrm{ch}(x)e^{\mathrm{sh}(x)}-1$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = \left(\mathrm{sh}(x)+\mathrm{ch}^2(x)\right)e^{\mathrm{sh}(x)}=u(x)e^{\mathrm{sh}(x)}$$

D'après la question précédente on en déduit que :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	

De plus on sait que :

$$f'(x)=\mathrm{ch}(x)e^{\mathrm{sh}(x)}-1 \Longrightarrow f'(0)=0$$

On a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{f(x)} \geq 0 \Longrightarrow \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{sh(x)}} \geq 1 + x$$

De plus on a :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{\mathrm{sh(-x)}} \geq 1 - x$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in]0;1[, \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{sh(-x)}}} \leq \frac{1}{1-\mathrm{x}} \left(\text{car } \mathrm{x} \mapsto \frac{1}{\mathrm{x}} \text{ est décroissante sur }]0;1[\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{x} \in]\mathbf{0};\mathbf{1}[, \mathbf{1} + \mathbf{x} \leq \mathbf{e}^{\mathbf{sh(x)}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{x}}}$$

Partie B :

1) On sait que :

$$\forall\, \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{k} \in [\![\mathrm{n};\mathrm{np}]\!], 0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Ainsi on peut appliquer l'égalité démontré à la dernière question de la partie A :

$$\forall\, \mathrm{x} \in]0;1[, 1 + \mathrm{x} \leq \mathrm{e}^{\mathrm{sh(x)}} \leq \frac{1}{1-\mathrm{x}}$$

$$\Rightarrow \forall\, \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{k} \in [\![\mathrm{n};\mathrm{np}]\!], 1 + \frac{1}{k} \leq e^{sh\left(\frac{1}{k}\right)} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

Comme la fonction ln est croissante sur]0; 1[:

$$\Rightarrow \forall\, \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{k} \in [\![\mathrm{n};\mathrm{np}]\!], \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{k}}\right) \leq \ln\left(e^{sh\left(\frac{1}{k}\right)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{k}}}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \forall\, \mathbf{n} \geq \mathbf{2}, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{k} \in [\![\mathbf{n};\mathbf{np}]\!], \mathbf{ln}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\right) \leq \mathbf{sh}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\right) \leq \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}}\right)}$$

2) On a :

$$\forall\, \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{k}}\right) \leq \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right) \leq \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{k}}}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall\, \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{k}}\right) = \ln\left(\prod_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{k}}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\prod_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \left(\frac{\mathrm{k}+1}{\mathrm{k}}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}} \times \frac{\mathrm{n}+2}{\mathrm{n}+1} \times \ldots \times \frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{np}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{n}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\mathrm{n}}+\mathrm{p}\right)$$

De même on a :

$$\forall\, \mathrm{n} \geq 2, \forall \mathrm{p} \in \mathbb{N}^*, \sum_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{k}}}\right) = \ln\left(\prod_{\mathrm{k=n}}^{\mathrm{np}}\left(\frac{\mathrm{k}}{k-1}\right)\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\mathrm{np}}{n-1}\right)$$
$$= -\ln\left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{np}}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\forall\, \mathbf{n} \geq \mathbf{2}, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}+\mathbf{p}\right) \leq \boldsymbol{S_n} \leq -\mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{np}}\right)}$$

3) On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{n}} = p \\ \lim\limits_{X\to p} \ln(X) = \ln(p) \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{par composée}} \lim \ln\left(\frac{\mathrm{np}+1}{\mathrm{n}}\right) = \ln(p)$$

De même on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{np}} = \frac{1}{p} \\ \lim\limits_{X\to\frac{1}{p}} \ln(X) = \ln\left(\frac{1}{p}\right) \end{cases} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{par composée}} \lim -\ln\left(\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{np}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\mathrm{p}}\right) = \ln(\mathrm{p})$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{S_n} = \mathbf{ln(p)}}$$

Problème : Des fonctions hyperboliques

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh(x)}) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)$$

Partie A : En utilisant la dérivation

1) On pose :

$$\mathrm{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \longmapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh(x)}) \end{cases} \qquad \mathrm{g}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \longmapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right) \end{cases}$$

a) Démontrer que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch(x)}} = \mathrm{g}'(\mathrm{x})$$

b) En déduire que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh(x)}) = \arctan\left(\frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}}\right)$$

Partie B : Grâce à la tangente

1) Rappeler le domaine de définition de la tangente, noté $\mathcal{D}_{\tan}$

2) a) Démontrer que :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, 2\mathrm{f(x)} \in \mathcal{D}_{\tan}$$

b) Déterminer l'expression de $\tan(2\mathrm{f(x)})$

3) a) Etudier la fonction :

$$\mathrm{h}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \longmapsto \frac{\mathrm{sh(x)}}{1+\mathrm{ch(x)}} \end{cases}$$

b) En déduire que : $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \mathrm{h(x)} \in]-1; 1[$

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, 2g(x) \in \mathcal{D}_{\tan}$
d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$
e) En déduire le résultat voulu.

Partie C : Une application
1) a) Démontrer que

$$\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et } \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Déterminer l'unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) En déduire que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

3) Proposez une autre façon de déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Partie A :
1) a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{sh'(x)}{1+sh^2(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{ch(x)}{ch^2(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \arctan(u(x)) \ avec\ u(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$$

On a d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{ch(x)(1+ch(x)) - sh^2(x)}{(1+ch(x))^2} = \frac{1+ch(x)}{(1+ch(x))^2} = \frac{1}{1+ch(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} = \frac{\frac{1}{1+ch(x)}}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)^2} = \frac{1+ch(x)}{(1+ch(x))^2 + sh^2(x)} = \frac{1+ch(x)}{1+2ch(x)+ch^2(x)+sh^2(x)}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) + sh^2(x) = ch^2(x) + (ch^2(x) - 1) = 2ch^2(x) - 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1+ch(x)}{2ch(x)(1+ch(x))} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$$

On a bien :

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ch}(\mathbf{x})} = \mathbf{g}'(\mathbf{x})}$$

b) On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{h}(x) = f(x) - g(x)$$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{h}'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, h(x) = c = h(0) = f(0) - g(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{arctan}(\mathbf{sh}(\mathbf{x})) = \mathbf{arctan}\left(\frac{\mathbf{sh}(\mathbf{x})}{\mathbf{1}+\mathbf{ch}(\mathbf{x})}\right)}$$

Partie B :

1) On sait que :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\tan}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[}$$

2) a) On sait que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\arctan(x)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\arctan\big(sh(x)\big)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},2f(x)\in\mathcal{D}_{\tan}}$$

b) On a :

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\tan\big(2f(x)\big)=\tan\Big(\arctan\big(sh(x)\big)\Big)=sh(x)}$$

3) a) On pose :

$$\forall x\in\mathbb{R},u(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$$

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},u(-x)=\frac{\mathrm{sh}(-x)}{1+\mathrm{ch}(-x)}=-\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$$

Donc u est impaire.
De plus on sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R},u'(x)=\frac{ch(x)\big(1+ch(x)\big)-sh^2(x)}{\big(1+ch(x)\big)^2}=\frac{1+ch(x)}{\big(1+ch(x)\big)^2}=\frac{1}{1+ch(x)}>0$$

Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+e^x}}_{car\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{-x}+1}=1$$

Par imparité on en déduit donc que :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}=-1$$

b) On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\in]-1;1[}$$

c) On a d'après la question précédente :

$$\forall x\in\mathbb{R},-1<\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}<1$$

$$\Rightarrow\arctan(-1)<\arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)<\arctan(1)\quad(car\arctan est\ croissante\ sur\ \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow-\frac{\pi}{4}<g(x)<\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<2g(x)<\frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que : $\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},2g(x)\in\mathcal{D}_{\tan}}$

d) On a :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},2g(x)=2\arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

$$\Rightarrow\tan\big(2g(x)\big)=\tan\left(2\arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)\right)$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[, \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \tan\big(2g(x)\big) = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{\text{sh(x)}}{1+\text{ch(x)}}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{\text{sh(x)}}{1+\text{ch(x)}}\right)\right)} = 2\times\frac{\frac{\text{sh(x)}}{1+\text{ch(x)}}}{1-\left(\frac{\text{sh(x)}}{1+\text{ch(x)}}\right)^2}$$

$$\boxed{= \mathbf{2}\times\frac{\mathbf{sh(x)}\big(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch}(\boldsymbol{x})\big)}{\big(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch}(\boldsymbol{x})\big)^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{sh}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x})} = \mathbf{2}\times\frac{\mathbf{sh(x)}\big(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch}(\boldsymbol{x})\big)}{\mathbf{2}\big(\mathbf{1}+\boldsymbol{ch}(\boldsymbol{x})\big)} = \boldsymbol{sh}(\boldsymbol{x})}$$

e) On a démontré grâce aux questions précédentes que :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \tan\big(2\text{g(x)}\big) = \tan\big(2\text{f(x)}\big)$$

De plus on a :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, 2\text{g(x)} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\; et \; 2\text{f(x)} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

Comme tan est bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit donc que :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, 2\text{g(x)} = 2f(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \mathbf{g(x)} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$$

Partie C

1) a) On a :

$$\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)}+e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

De même on a :

$$\boxed{\mathbf{sh}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln(3)}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\mathbf{ln(3)}}-e^{-\frac{1}{2}\mathbf{ln(3)}}}{\mathbf{2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{3}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}}$$

b) On sait que :

$$\tan(\text{x}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Come tan est bijective sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\begin{cases}\mathbf{tan(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \\ \boldsymbol{x} \in \left]-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}};\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}}$$

2) On sait que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$$

Or on sait d'après la partie A ou la partie B que :

$$\forall \text{ x} \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}\arctan\big(\text{sh(x)}\big) = \arctan\left(\frac{\text{sh(x)}}{1+\text{ch(x)}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\pi}{12} = \arctan\left(\frac{\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)}{1+\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{tan}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}\right) = \frac{\mathbf{sh}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln(3)}\right)}{\mathbf{1}+\mathbf{ch}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln(3)}\right)} = \frac{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}}{\mathbf{1}+\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}}$$

3) On a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

On en déduit donc que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est solution de :

$$X^2 + 2\sqrt{3}X - 1 = 0$$

Or on sait que :

$$X^2 + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X \in \{-\sqrt{3}-2\,;2-\sqrt{3}\}$$

Or on sait que :

$$\frac{\pi}{12} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$$

On en déduit donc que ;

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$$

Remarque : On a :

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$