Programme de Colle n°5
PCSI 2023-2024
(16 octobre au 20 octobre)

Calcul algébrique

- Utilisation du symbole somme
- Décalage d'indice et télescopage
- Nouvelle identité remarquable :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$
- Sommes des termes d'une suite géométrique
$$\forall q \in \mathbb{C}, q \neq 1, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$
- Sommes doubles
- Binôme de Newton

Nombres complexes

- Définition du nombre imaginaire i
- Rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$,
- Conjugué
- Module d'un nombre complexe
- Inégalité triangulaire

Exercices du V et TD VI (début)

Question de cours

Chapitre 5 :

- **Proposition V.d.3 (identité de Fermat)** : On a :
$$\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$
- **Proposition V.e.1 (binôme de Newton) (*)** : On a :
$$\forall (x;y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Exercices du type :
$$\sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j) \text{ , } S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)}, A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Chapitre 6 :

- **Propriété I.d.2 (Inégalité triangulaire avec cas d'égalité à la fin de la démonstration)** :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \big||z| - |z'|\big| |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

Exercices à savoir refaire

Chapitre 5 :

- **Application I.d.2** : Calculer :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
- **Propriété I.d.3 :**
$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N} : a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$
- **Application III.c.2** : Calculer :
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$$

Chapitre 6 :

- Démontrer que : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, |a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$
- Forme algébrique de :
$$z = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$$