

DM n°2,5
Vacances de la Toussaint
PCSI 2023-2024

Exercice 1 : Les fonctions trigonométriques réciproques

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: x \mapsto \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2x)]$$

- 1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$ en justifiant.
- b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer la valeur de $f((2k + 1)\pi)$.
- 2) Démontrer que l'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .
- 3) Démontrer que f est paire.
- 4) Montrer que f est 2π -périodique.
- 5) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi; 4\pi]$.

(Indication : On pourra distinguer deux cas : $[0; \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}; \pi]$)

Exercice 2 : Calcul d'une somme de deux manières différentes

Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de déterminer de deux manières différentes la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k2^{k-1}$$

Partie A : A l'aide d'une somme double

- 1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = n2^{n+1} + 1$$

- 2) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$$

- 3) En déduire la valeur de S_n .

Partie B : A l'aide d'une fonction

On pose la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

- 1) Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de x et de x^{n+1}
- 2) On suppose que f_n est dérivable. Déterminer $f_n'(x)$.
- 3) En déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k2^{k-1}$$