DM n°3
Pour le 21 novembre 2023

Exercice 1 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z-i}{iz-1} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer.
- 2) Déterminer une expression de $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.
- 3) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
- 4) Démontrer que l'équation $f(z) = z$ admet deux solutions distinctes.
- 5) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U} \setminus \{-i\}) = \mathbb{R}$$

a) Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

b) En déduire que :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[, f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n = 1$.

d) Résoudre l'équation $(f(z))^n = 1$ et montrer que toutes les solutions sont réelles.

Exercice 2 : Une nouvelle somme de cosinus

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$$

1) a) Déterminer la valeur de $S_0(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer la valeur de $S_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2) a) Rappeler la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{C}$.

b) En déduire la valeur de $S_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$$

b) Démontrer par récurrence que :

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(a_k) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$$

c) En déduire des deux questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \operatorname{Re}\left((1 + e^{ix})^n\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

5) Résoudre $S_n(x) = 0$

Exercice 3 : Encore une somme

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n [\cos(kx)]^2 = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$$

$$\begin{cases} A_n(x) = \sum_{k=0}^n [\cos(kx)]^2 = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \\ B_n(x) = \sum_{k=0}^n [\sin(kx)]^2 = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de A_n et B_n .

2) Déterminer la fonction $x \mapsto A_n(x) + B_n(x)$.

3) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A_n(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$$

b) En déduire une expression simplifiée de $A_n(x) - B_n(x)$ (On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de x réel).

c) En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n (On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de x réel).