

Correction DS n°2

Exercice 1 : Limite d'une somme

Le but de cet exercice est de calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Dans toute la suite de cet exercice, on pose :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

1) Rappeler l'ensemble de définition de $\arctan$ et en déduire l'ensemble de définition de f .

2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$$

4) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \arctan(n+1)$$

5) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

1) On sait que $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, 1+x+x^2 \neq 0\}$$

Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x+x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

3) On pose pour tout x positif :

$$\forall x \geq 0, g(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x)$$

$g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par composé de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, g'(x) &= -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{(1+x+x^2)^2}} - \frac{1}{1+(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{-2x-1}{1+(x^2+x+1)^2} + \frac{-1-x^2+1+(1+x)^2}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)} \\ &= \frac{-2x-1}{1+(x^2+x+1)^2} + \frac{2x+1}{(1+x^2)(1+(1+x)^2)} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+(x^2+x+1)^2 = 2+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

De même on a :

$$(1+x^2)(1+(1+x)^2) = (1+x^2)(2+2x+x^2) = 2+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, g'(x) = 0$$

Donc la fonction g est constante sur $\mathbb{R}^+$.

Or on a :

$$f(0) = \arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, S_n &= \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k)) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) \quad (\text{par télescopage}) \\ &= \arctan(n+1) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 : Une dérivée n-ième

On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \cos(x)$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right)$$

4) Déterminer les valeurs de x tel que :

$$f^{(n)}(x) = 0$$

1) a) On sait que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left[\cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{2} \left[\cos(x) \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(x) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ &= \cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

b) f est de la forme $u \times v$

$$= \sin(x) + \cos(x)$$

donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x \cos(x) + e^x (-\sin)(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) Il suffit de dériver une f' toujours de la forme $u \times v$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) &= \sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}e^x \left(\underbrace{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \\ &= 2e^x \cos\left(x + 2 \times \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

3) On raisonne par récurrence. Pour tout entier naturel n on pose la proposition $P(n)$ suivante :

$$P(n): "\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) "$$

Initialisation : Pour $n=0$:

$$2^{\frac{0}{2}}e^x \cos\left(x + 0 \times \frac{\pi}{4}\right) = e^x \cos(x) = f(x)$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $P(n)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) &= 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) &= 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) - 2^{\frac{n}{2}}e^x \sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}}e^x \left(\underbrace{\cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + n \frac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2} \cos\left(x + n \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}}e^x \cos\left(x + (n+1) \times \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est toujours vraie.

4) On résout :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) = 0 &\Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}}e^x \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + n \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + n \frac{\pi}{4} = \frac{(2k+1)\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

Problème 1 : Une petite égalité

Le but de ce problème est d'exprimer plus simplement la fonction suivante :

$$f: x \mapsto \operatorname{Arccos} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)$$

Partie A : Etude classique de fonction

On pose :

$$h: x \mapsto \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de h.
- 2) Pourquoi peut-on dire que la courbe de h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ?
- 3) Etudier la limite de h en $+\infty$.
- 4) Déterminer les variations de la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de h sur son ensemble de définition.

Partie B : Simplification de f

- 1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction arccos.
- 2) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- 3) Démontrer que :

$$\forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \cos(2\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

- 4) a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $x = \tan(\theta)$
- b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \arctan(|x|)$$

- c) En déduire l'allure de la courbe représentative de f_1 . Tracer-la sur votre copie.
- 5) On pose de même :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{Arcsin} \left(\frac{2x}{1 + x^2} \right) \end{cases}$$

Déterminer une écriture plus simple de g puis en déduire sa courbe.

Partie A : Etude classique de fonction

- 1) a) h est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x^2 > 0$.

- b) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = h(x)$$

Donc h est paire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- c) On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = -1$$

- d) On sait que h est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, donc sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \frac{-2x(1 + x^2) - (1 - x^2)2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0 ; +\infty[, f'(x) < 0$$

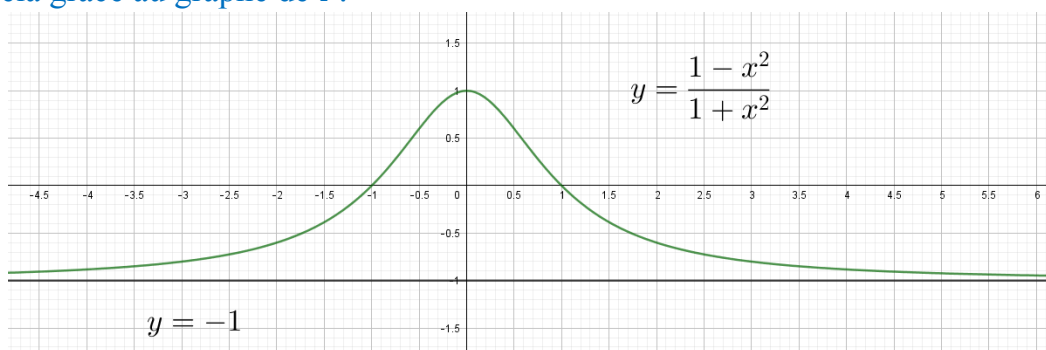
On a donc :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	1	$+\infty$

Par parité on en déduit donc que :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	-1	1	$+\infty$ -1

On vérifie cela grâce au graphe de f :



Partie B : Simplification de f

1) on sait que $\mathcal{D}_{\arccos} = [-1; 1]$

2) On a démontré dans la partie 1 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in]-1; 1[$$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) On sait que :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} &= \frac{1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \\ &= \cos(2\theta) \end{aligned}$$

4) a) On sait que tangente est continue et strictement croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. De plus :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

D'après le théorème de la bijection, $\tan$ réalise une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta)$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \tan(\theta), \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

On a donc :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arccos\left(\frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}\right) = \arccos(\cos(2\theta))$$

Or on sait que :

$$\forall \theta \in [0; \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, \theta = \arctan(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 2\theta \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos(2\theta)) = 2\theta = 2 \arctan(x)$$

De plus on sait que :

$$\forall \theta \in [-\pi; 0], \arccos(\cos(\theta)) = \arccos\left(\cos\left(\underbrace{-\theta}_{\in [0; \pi]}\right)\right) = -\theta$$

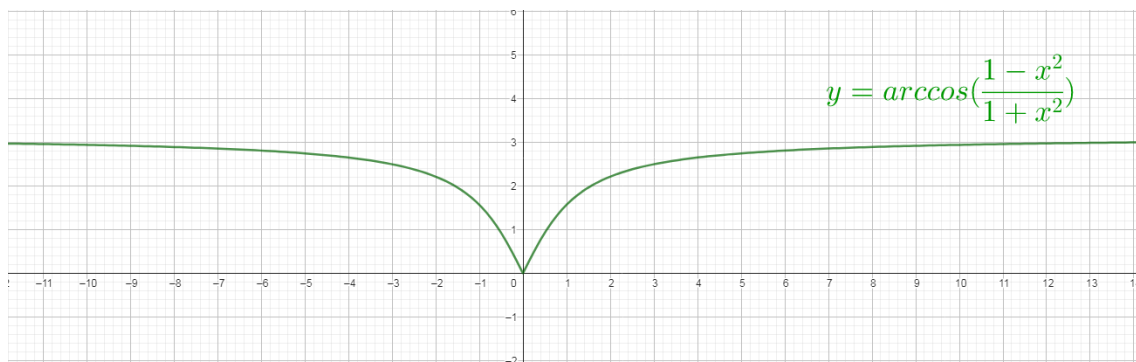
On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x \leq 0, \theta = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right] \Rightarrow 2\theta \in [-\pi; 0] \Rightarrow \arccos(\cos(2\theta)) &= -2\theta \\ &= -2 \arctan(x) = 2 \arctan(-x) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arctan(x) & \text{si } x > 0 \\ -2 \arctan(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = 2 \arctan(|x|)$$

c) On a la courbe suivante :



5)

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \frac{2 \tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} = \frac{2 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{2 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)$$

On effectue le changement de variable suivant :

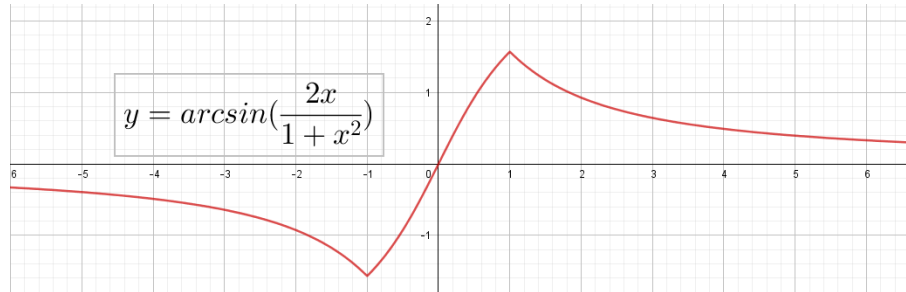
$$x = \tan(\theta), \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

On a donc :

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin\left(\frac{2 \tan(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}\right) = \arcsin(\sin(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta & \text{si } \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \\ \pi - 2\theta & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\\ -\pi + 2\theta & \text{si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 \arctan(x) & \text{si } x \in [-1; 1] \\ \pi - 2 \arctan(x) & \text{si } x \in]1; +\infty[\\ \pi + 2 \arctan(x) & \text{si } x \in]-\infty; -1[\end{cases}$$

On a alors la courbe suivante :



Problème 2 : Calcul des sommes des puissances successives des n premiers entiers naturels

non nul

Soit $(\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose :

$$S_\ell(n) = \sum_{k=1}^{k=n} k^\ell$$

Le but de ce problème est de donner une relation de récurrence entre $S_\ell(n)$ et tous ses prédécesseurs $S_k(n)$, pour $k \in \llbracket 0; \ell - 1 \rrbracket$.

Partie A : Ce que l'on connaît déjà

- 1) Déterminer la valeur de $S_0(n)$ en fonction de n .
- 2) Déterminer la valeur de $S_1(n)$ en fonction de n .
- 3) Démontrer que :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie B : Une formule de récurrence

- 1) Énoncer la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{R}$.
- 2) On pose :

$$A = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^{\ell+1}$$

- a) Démontrer que :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N}^2, A = (n+1)^{\ell+1} + S_{\ell+1}(n) - 1$$

- b) Démontrer que :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N}^2, A = S_{\ell+1}(n) + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

$$\left(\text{Indice : On pourra utiliser le fait que : } \sum_{k=2}^{n+1} k^{\ell+1} \right. \\ \left. = \sum_{k=1}^n (k+1)^{\ell+1} \text{ et utilisez le binôme de Newton} \right)$$

c) En déduire la relation $(\mathcal{R}_{\ell,n})$ suivante :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N}^2, (\mathcal{R}_{\ell,n}) : (\ell+1)S_{\ell}(n) = (n+1)^{\ell+1} - 1 - \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

3) Dans cette question, on rappelle que :

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_{4,n})$, déterminer $S_4(n)$.

Partie C : un peu de Python !

Ecrire une fonction Python `sommeentier( $\ell, n$ )` qui en argument prend deux entiers naturels, avec n non nul, et en sortie affiche la valeur de $S_{\ell}(n)$.

Partie A : Ce que l'on connaît déjà

1) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_0(n) = \sum_{k=1}^{k=n} k^0 = \sum_{k=1}^{k=n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n$$

2) On peut utiliser la méthode de Gauss :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \Rightarrow 2S_1(n) = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{k=1}^n (n+1) \\ = n(n+1)$$

$$\Rightarrow S_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3) On peut le faire par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n) : " \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} "$$

Initialisation : Pour $n=1$ on a :

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^3 = 1 \\ \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{HR}_n)$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{HR}_n} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)}{6} (n(2n+1) + 6n+6) \\ &= \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6) \end{aligned}$$

Ici on peut conclure de deux façons différentes :

- **Méthode 1 : On développe le résultat voulu :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

- **Méthode 2 : On factorise le polynôme $P(n) = 2n^2 + 7n + 6$ grâce à ses racines.**

On résout :

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 2 \times 6 \times 4 = 1$$

On en déduit donc que :

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-7-1}{4}; \frac{-7+1}{4} \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ -2; -\frac{3}{2} \right\}$$

On en déduit donc que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 7x + 6 = 2(x - (-2)) \left(x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right) = 2(x+2) \left(x + \frac{3}{2} \right) = (x+2)(2x+3)$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)}{6} (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

On en déduit donc que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Partie B : Une formule de récurrence

1) On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2) On pose :

$$A = \sum_{k=2}^{k=n+1} k^{\ell+1}$$

a) On a :

$$\begin{aligned} \forall (\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, A &= \sum_{k=2}^{k=n+1} k^{\ell+1} = \sum_{k=2}^{k=n} k^{\ell+1} + (n+1)^{\ell+1} = \sum_{k=1}^{k=n} k^{\ell+1} - 1^{\ell+1} + (n+1)^{\ell+1} \\ &= (n+1)^{\ell+1} + S_{\ell+1}(n) - 1 \end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall (\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, A &= \sum_{k=2}^{k=n+1} k^{\ell+1} = \sum_{k=1}^{k=n} (k+1)^{\ell+1} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{i} k^i = \sum_{i=0}^{\ell+1} \sum_{k=1}^{k=n} \binom{\ell+1}{i} k^i \\ &= \sum_{i=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{i} \underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} k^i}_{S_i(n)} = \sum_{i=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{i} S_i(n) = \underbrace{\binom{\ell+1}{\ell+1}}_{=1} S_{\ell+1}(n) + \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{i} S_i(n) \\ &= S_{\ell+1}(n) + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} S_k(n) \end{aligned}$$

c) D'après la question 1 et 2 on en déduit que :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, (n+1)^{\ell+1} + S_{\ell+1}(n) - 1 = S_{\ell+1}(n) + \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

On a donc :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, (n+1)^{\ell+1} - 1 = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

Or on voit que :

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} S_k(n) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{k} S_k(n) + \binom{\ell+1}{\ell} S_{\ell}(n)$$

De plus on sait que :

$$\binom{\ell+1}{\ell} = \frac{(\ell+1)!}{\ell! (\ell+1-\ell)!} = \frac{(\ell+1)!}{\ell!} = \ell+1$$

On en déduit donc que :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, (\ell+1) S_{\ell}(n) = (n+1)^{\ell+1} - 1 - \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

3) On a :

$$\forall (\ell, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, (\ell+1) S_{\ell}(n) = (n+1)^{\ell+1} - 1 - \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{k} S_k(n)$$

On utilise cette relation pour $\ell = 4$:

$$\begin{aligned} 5 \times S_3(n) &= 5 \times \sum_{k=1}^{k=n} k^4 = (n+1)^5 - 1 - \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} S_k(n) \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - \left(\binom{5}{0} S_0(n) + \binom{5}{1} S_1(n) + \binom{5}{2} S_2(n) + \binom{5}{3} S_3(n) \right) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\binom{5}{0} = 1, \binom{5}{1} = 5 \text{ et } \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = 10, \binom{5}{3} = 10$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 5 \times S_4(n) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n - \frac{5n(n+1)}{2} - 10 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\quad - 10 \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n - \frac{5}{2}(n^2 + n + n^4 + 2n^3 + n^2) - \frac{5}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) \\ &= \frac{6n^5 + 30n^4 + 60n^3 + 60n^2 + 24n - 15n^4 - 30n^3 - 30n^2 - 15n - 20n^3 - 30n^2 - 10n}{6} \\ &= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{6} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_4(n) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

Remarque : On peut s'arrêter là ou bien factoriser le numérateur.

On pose :

$$P(x) = 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - x = x(6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1) = xQ(x)$$

On cherche à factoriser le polynôme $Q(x)$ avec :

$$Q(x) = 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1$$

On doit donc chercher les racines de Q .

On remarque que :

$$Q(-1) = 0$$

On a donc :

$$Q(x) = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

Par identification simple, on a de suite que $a = 4$ (seul terme en x^4 en développant) et $d = -1$ (seul terme constant). On a donc :

$$\exists (b, c) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x+1)(6x^3 + bx^2 + cx - 1)$$

On peut donc prendre deux valeurs de x distinctes.

Pour $x = 1$ on a :

$$30 = 2(5 + b + c) \Rightarrow b + c = 10$$

Pour $x = -2$ on a :

$$15 = -(-48 + 4b - 2c - 1) \Rightarrow 2b - c = 17$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} b + c = 10 \\ 2b - c = 17 \end{cases} \Rightarrow 3b = 27 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow c = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x+1)(6x^3 + 9x^2 + x - 1)$$

On peut aller plus loin puisque $x = -\frac{1}{2}$ est racine (mais là ce n'est plus évident !!)

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 6x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 1 = (x+1)(2x+1)(3x^2 + 3x - 1)$$

Au final on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Partie C : Un peu de Python

On a le programme suivant qui fonctionne :

```
def sommeentier(1,n):
    s=0 #C'est notre futur S1(n)
    for k in range(1,n+1): #c'est l'équivalence du k qui varie de 1 à n!
        s=s+k*1 #Là c'est l'équivalent du signe sigma!
    return (s)
```

Remarque 1 : Il faut faire attention avec le range(1,n+1). Il renvoie une liste (en fait un tuple !) qui va de 1 jusqu'à n. Il ne prend jamais le dernier !

Remarque 2 : Pour vérifier notre programme on peut faire par exemple :

```
>>> sommeentier(1,100)
5050
>>> |
```

C'est la fameuse légende sur Gauss :

$$1 + 2 + \dots + 99 + 100 = 5050$$

Vous savez aussi que :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On peut essayer avec une valeur de n non négligeable !!

```
>>> sommeentier(2,153)
1205589
>>> 153*154*(2*153+1)/6
1205589.0
>>> |
```

Notre programme semble fonctionner !