DS n°2, PCSI 2023-2024
14 octobre 2023

Exercice 1 : Limite d'une somme

Le but de cet exercice est de calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

Dans toute la suite de cet exercice, on pose :

$$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

1) Rappeler l'ensemble de définition de arctan et en déduire l'ensemble de définition de f.

2) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \arctan'(\mathrm{x})=\frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$$

3) En déduire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)=\arctan(x+1)-\arctan(x)$$

4) Démontrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\arctan(n+1)$$

5) Déterminer la limite de S_n en $+\infty$.

Exercice 2 : Une dérivée n-ième

On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin(\mathrm{x})$$

1) a) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \sin(\mathrm{x})+\cos(\mathrm{x})=\sqrt{2}\sin\left(\mathrm{x}+\frac{\pi}{4}\right)$$

b) En déduire que :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \mathrm{f}'(\mathrm{x})=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin\left(\mathrm{x}+\frac{\pi}{4}\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \mathrm{f}''(\mathrm{x})=2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin\left(\mathrm{x}+2\times\frac{\pi}{4}\right)$$

3) Démontrer que :

$$\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}, \forall\, \mathrm{n}\in\mathbb{N}, \mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x})=2^{\frac{\mathrm{n}}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\sin\left(\mathrm{x}+\mathrm{n}\frac{\pi}{4}\right)$$

4) Déterminer les valeurs de x tel que :

$$\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{x})=0$$

Problème 1 : Une petite égalité

Le but de ce problème est d'exprimer plus simplement la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Partie A : Etude classique de fonction

On pose :

$$h : x \longmapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h.
2) Pourquoi peut-on dire que la courbe de h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ?
3) Etudier la limite de h en $+\infty$.
4) Déterminer les variations de la fonction h sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de h sur son ensemble de définition.

Partie B : Simplification de *f*

1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction arccos.
2) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
3) Démontrer que :

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \cos(2\theta) = \frac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$$

4) a) Démontrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists !\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(\theta)$

b) En déduire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\arctan(|x|)$$

c) En déduire l'allure de la courbe représentative de f_1. Tracer-la sur votre copie.

5) On pose de même :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \end{cases}$$

Déterminer une écriture plus simple de g puis en déduire sa courbe.

Problème 2 : Calcul célèbre de sommes

Soit $(\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On pose :

$$\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{k}=\mathrm{n}} \mathrm{k}^\ell$$

Le but de ce problème est de donner une relation de récurrence entre $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n})$ et tous ses prédécesseurs $\mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$, pour $k \in [\![0; \ell - 1]\!]$.

Partie A : Ce que l'on connait déjà

1) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_0(\mathrm{n})$ en fonction de n.
2) Déterminer la valeur de $\mathrm{S}_1(\mathrm{n})$ en fonction de n.
3) Démontrer que :

$$\mathrm{S}_2(\mathrm{n}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie B : Une formule de récurrence

1) Enoncer la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{R}$.
2) On pose :

$$A = \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{k}=\mathrm{n}+1} \mathrm{k}^{\ell+1}$$

a) Démontrer que :

$$\forall(\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{A} = (\mathrm{n}+1)^{\ell+1} + \mathrm{S}_{\ell+1}(\mathrm{n}) - 1$$

b) Démontrer que :

$$\forall(\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{A} = \mathrm{S}_{\ell+1}(\mathrm{n}) + \sum_{\mathrm{k}=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{\mathrm{k}} \mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$$

$$\left(\textit{Indice} : \text{On pourra utiliser le fait que : } \sum_{\mathrm{k}=2}^{\mathrm{n}+1} \mathrm{k}^{\ell+1} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} (\mathrm{k}+1)^{\ell+1} \text{ et utilisez le binôme de Newton}\right)$$

c) En déduire la relation $(\mathcal{R}_{\ell,n})$ suivante :

$$\forall(\ell, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}^2, (\mathcal{R}_{\ell,n}) : (\ell+1)\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n}) = (\mathrm{n}+1)^{\ell+1} - 1 - \sum_{\mathrm{k}=0}^{\ell-1} \binom{\ell+1}{\mathrm{k}} \mathrm{S}_\mathrm{k}(\mathrm{n})$$

3) Dans cette question, on rappelle que :

$$S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_{4,n})$, déterminer $S_4(n)$.

Partie C : un peu de Python !

Ecrire une fonction Python sommeentier(ℓ, n) qui en argument prend deux entiers naturels, avec n non nul, et en sortie affiche la valeur de $\mathrm{S}_\ell(\mathrm{n})$.