

Correction DM n°2,5

Exercice 1 : Les fonctions trigonométriques réciproques

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: x \mapsto \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2x)]$$

- 1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$ en justifiant.
- b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer la valeur de $f((2k+1)\pi)$.
- 2) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- 3) Démontrer que f est paire.
- 4) Montrer que f est 2π -périodique.
- 5) Tracer le graphe de f sur $[-4\pi; 4\pi]$.

(Indication : On pourra distinguer deux cas : $\left[0; \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$)

1) a) $f(0) = \arccos(\cos(0)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(0)) = \frac{3}{2} \arccos(1) = 0$

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, f((2k+1)\pi) &= \arccos(\cos((2k+1)\pi)) + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2((2k+1)\pi))] \\ &= \arccos(-1) + \frac{1}{2} \arccos(1) \\ &= \pi \end{aligned}$$

2) On sait que :

$$\mathcal{D}_{\arccos} = [-1; 1] \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in [-1; 1].$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \arccos[\cos(-x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2(-x))] = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2x)] = f(x)$$

Donc f est paire.

4) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = \arccos[\cos(x+2\pi)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2(x+2\pi))] = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2x)]$$

Car $\cos$ est 2π -périodique.

On en déduit donc que f est 2π -périodique.

5) Il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$ puis de la prolonger sur $[-\pi; \pi]$ par parité puis sur $[-4\pi; 4\pi]$ par périodicité.

On a :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 2x \in [0; \pi]$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [0; \pi], \arccos(\cos(x)) = x$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2x)] = x + \frac{1}{2} \times 2x = 2x$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], 2x \in [\pi; 2\pi]$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], \cos(x) = \cos(\pi + \alpha) = \cos(\pi - \alpha) \text{ avec } \alpha = x - \pi$$

De plus on a :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], x - \pi \in [0; \pi]$$

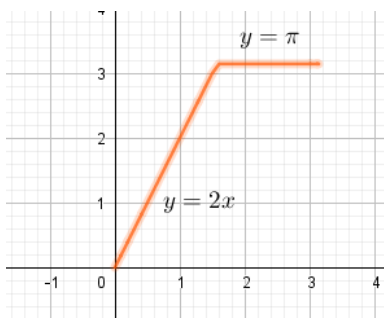
On en déduit donc que :

$$\forall x \in [\pi; 2\pi], \arccos(\cos(x)) = \arccos(\cos(\pi - \alpha)) = \pi - \alpha = \pi - (x - \pi) = 2\pi - x$$

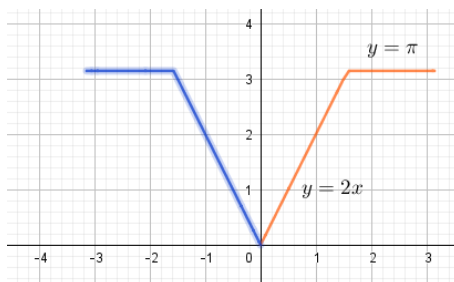
On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right], f(x) = \arccos[\cos(x)] + \frac{1}{2} \arccos[\cos(2x)] = x + \frac{1}{2} (2\pi - 2x) = \pi$$

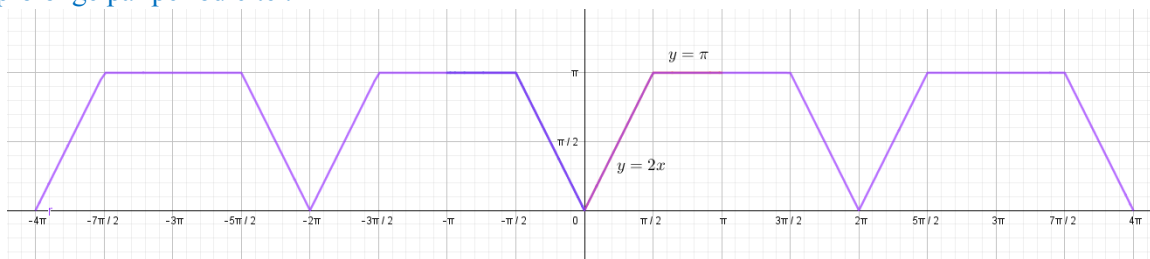
On a donc le graphe de f sur $[0; \pi]$:



Par parité on a :



Enfin on prolonge par périodicité :



Exercice 2 : Calcul d'une somme de deux manières différentes

Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de déterminer de deux manières différentes la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k 2^{k-1}$$

Partie A : A l'aide d'une somme double

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = n 2^{n+1} + 1$$

2) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{j=0}^n (j+1) 2^j$$

3) En déduire la valeur de S_n .

Partie B : A l'aide d'une fonction

On pose la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

1) Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de x et de x^{n+1}

2) On suppose que f_n est dérivable. Déterminer $f_n'(x)$.

3) En déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k 2^{k-1}$$

Partie A : A l'aide d'une somme double

1) On veut calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{j=k}^n 2^j = 2^k + 2^{k+1} + \dots + 2^n = 2^k(1 + 2 + \dots + 2^{n-k}) = 2^k \sum_{j=0}^{n-k} 2^j = 2^k \times \frac{2^{n-k+1} - 1}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, T_n = 2^{n+1} - 2^k$$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{k=0}^n (2^{n+1} - 2^k) = \left(\sum_{k=0}^n 2^{n+1} \right) - \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) = (n+1)2^{n+1} - (2^{n+1} - 1)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = n2^{n+1} + 1$$

2) On peut faire un tableau à double entrée :

k \ j	0	1	2	...	n
0	1	2	4	...	2^n
1		2	4	...	2^n
2			4	...	2^n
$\vdots$					$\vdots$
n					2^n

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j 2^j = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$$

3) On sait que :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = \sum_{k=1}^n k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^k$$

De plus d'après les deux questions précédentes on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = n2^{n+1} + 1 = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$$

On en déduit donc que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)2^k = (n-1)2^n + 1$$

Partie B : A l'aide d'une fonction

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$f_n(1) = n + 1$$

2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, f'_n(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

3) Il suffit de calculer $f'_n(2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'_n(2) = \sum_{k=0}^n k2^{k-1} = \frac{n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(2-1)^2} = 2n2^n - (n+1)2^n + 1 = (n-1)2^n + 1$$