Correction DM n°3

Exercice 1 : Une bijection sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

Dans tout cet exercice on pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{iz-1} \end{cases}$$

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ à déterminer.
2) Déterminer une expression de $f^{-1}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$.
3) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
4) Démontrer que l'équation $f(z) = z$ admet deux solutions distinctes.
5) Dans cette question on souhaite montrer que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}$$

a) Montrer que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) En déduire que :

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[, f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Rappeler les solutions de $z^n = 1$.
d) Résoudre l'équation $\left(f(z)\right)^n = 1$ et montrer que toutes les solutions sont réelles.

1) Soit $z' \in \mathbb{C}$. On résout :

$$f(z) = z' \Leftrightarrow \frac{z-i}{iz-1} = z' \Leftrightarrow z(1-iz') = i - z'$$

1^er^ cas : Si $1 - iz' = 0$

On sait que :

$$1 - iz' = 0 \Leftrightarrow z' = -i$$

Or on a :

$$i - (-i) = 2i \neq 0$$

On en déduit que $f(z) = -i \Leftrightarrow z \in \emptyset$

2^ième^ cas : $1 - iz' \neq 0$

On a alors :

$$f(z) = z' \Leftrightarrow z = \frac{i-z'}{1-iz'} = \frac{z'-i}{iz'-1} = f(z')$$

On en déduit donc que f est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans lui-même et qu'elle est involutive : $f^{-1} = f$.

2) On l'a déjà fait précédemment !

3) On sait que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}, \mathcal{I}m\left(f(z)\right) = 0\}$.

On pose $z = x + iy, (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0;-1)\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= \frac{x+i(y-1)}{(-1-y)+ix} \\ &= \frac{\left(x+i(y-1)\right)(-(y+1)-ix)}{(1+y)^2+x^2} \\ &= \frac{-x(y+1)+x(y-1)}{(1+y)^2+x^2} + i\frac{-x^2+1-y^2}{(1+y)^2+x^2} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$$

4) On résout :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z-i}{iz-1} = z \Leftrightarrow iz^2 - 2z + i = 0$$

On a : $\Delta = 4 - 4i^2 = 8$

On en déduit donc que l'équation admet deux solutions distinctes car $\Delta \neq 0$. On ne cherche pas forcément les solutions.
Les voici tout de même :

$$\frac{z-i}{iz-1} = z \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2i} = i\left(\sqrt{2}-1\right) \\ \text{ou} \\ z_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2i} = -i\left(1+\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

5) a) On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, 1-e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

b) On sait que :

$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{z-i}{iz-1} = e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow z\left(1-ie^{i\theta}\right) = i - e^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow z\left(1-e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right) = i\left(1+e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$$
$$\Leftrightarrow -2iz\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

c) On sait que :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]$$

d) On sait que :

$$\left(f(z)\right)^n = 1 \Leftrightarrow f(z) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)} \text{ avec } k \in [\![0; n-1]\!], k \neq \frac{1}{4}n$$

Remarque : L'énoncé est ici incomplet ! La question 5) nous demande de montrer que :

$$\boxed{f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) = \mathbb{R}}$$

Cependant aucune sous-question ne nous demande de conclure ! C'est déjà un premier problème.
Ensuite si les questions et 2 et 3 sont bien faites, on a démontré que f était bijective, que $f^{-1} = f$ et que $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\}$. On a donc :

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow \mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$$

Donc il n'y a aucun calcul à faire. Ce que je viens de faire précédemment, nous ne pouvons le faire que si f est bijective. Sinon on peut avoir $f(A) = B$ et $f^{-1}(B) \neq A$. Il suffit de prendre $f : x \mapsto x^2, A = [0;1]$ *et* $B = [0;1]$. On a alors :

$$f(A) = B \text{ et } f^{-1}(B) = [-1;1] \neq A$$

Mais ici il n'y a aucun problème !

Bon admettons que f ne soit pas bijective, et que l'on veuille démontrer que $\mathbb{R} = f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$.
C'est-à-dire que l'on cherche tous les antécédents $z \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$ tel que $f(z) \in \mathbb{U}\backslash\{-i\}$.
On sait que $\mathbb{U}\backslash\{-i\} = \left\{z = e^{i\theta}, \theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$. Ainsi on résout :

$$f(z) = e^{i\theta}$$

Ensuite on fait le calcul :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \left(\text{avec } \theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

On a donc montré que :

$$f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\}) \sqsubset \mathbb{R}$$

Encore faut-il montrer l'autre inclusion. On peut le faire de deux façons.

Soit on prendre un $z \in \mathbb{R}$ et on montre que $f(z) \in f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$, ce qui montre que $\mathbb{R} \sqsubset f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{-i\})$.
Ou bien on se sert de l'équivalence :

$$f(z) = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \left(avec\ \theta \not\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

Puis on montre que

$$g : \theta \mapsto = -\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $f(x) \in \mathbb{U}\backslash\{-i\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Une nouvelle somme de cosinus

On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$$

1) a) Déterminer la valeur de $S_0(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Déterminer la valeur de $S_3\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
2) a) Rappeler la formule du binôme de Newton sur $\mathbb{C}$.
b) En déduire la valeur de $S_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) a) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$$

b) Démontrer par récurrence que :

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e(a_i) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} a_i\right)$$

c) En déduire des deux questions précédentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \mathcal{R}e\left(\left(1+e^{ix}\right)^n\right)$$

4) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

5) Résoudre $S_n(x) = 0$

1) a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_0(x) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cos(kx) = \cos(0) = 1$$

b) On a :

$$S_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 1 + \binom{3}{1} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \binom{3}{2} \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \binom{3}{3} \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} = 1 - 3 = -2$$

2) a) On a :

$$\forall\ (x; y) \in \mathbb{C}^2, \forall\ n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

b) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \times 0\ ) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

3) a) On a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k 1^{n-k} = (1+z)^n$$

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e(a_i) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} a_i\right)"$$

Initialisation : $n = 0$. On a :

$$\sum_{k=0}^{0} \mathcal{R}e(a_i) = \mathcal{R}e(a_0) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{0} a_i\right)$$

Donc P_0 est vraie.
Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose vraie P_n.

$$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e(a_i) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} a_i\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \forall (a_0, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+2}, \sum_{k=0}^{n+1} \mathcal{R}e(a_i) &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{R}e(a_i) + \mathcal{R}e(a_{n+1}) \\ &= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} a_i\right) + \mathcal{R}e(a_{n+1}) \\ &= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_i\right) \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.
c)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \times x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{R}e(e^{ikx}) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \times x) = \mathcal{R}e\left(\left(1 + e^{ix}\right)^n\right)$$

4) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{ix} = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{-\frac{ix}{2}} + e^{\frac{ix}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + e^{ix}\right)^n &= \left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{ix}{2}}\right)^n \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k \times x) = \mathcal{R}e\left(2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{inx}{2}}\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

5) On a :

$$S_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{nx}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{ou} \\ \frac{nx}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 3 : Encore une somme

Soit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. On propose de calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [\cos(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$$

$$\begin{cases} A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [\cos(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [\sin(kx)]^2 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de A_n et B_n.

2) Déterminer la fonction $x \mapsto A_n(x) + B_n(x)$.

3) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A_n(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} cos(2kx)$$

b) En déduire une expression simplifiée de $A_n(x) - B_n(x)$ (On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de x réel).

c) En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n (On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de x réel).

1) On a :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}, \forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} [\cos^2(kx) + \sin^2(kx)] = \sum_{k=0}^{n} 1 = \mathrm{n} + 1$$

2) a) On a :

$$\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) - \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} [\cos^2(kx) - \sin^2(kx)]$$

Or on sait que :

$$\forall\, (\mathrm{a}; \mathrm{b}) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Ainsi on a:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} [cos^2(kx) - sin^2(kx)] = \sum_{k=0}^{n} cos(2kx)$$

b) On sait que :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} Re\left(e^{i\theta k}\right) = Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\theta k}\right) = Re\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k\right)$$

On retrouve donc l'expression suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 \; si \; q = 1 \\ \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} si \; q \in \mathbb{C} \backslash \{1\} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \begin{cases} n+1 \; si \; \theta \equiv 0[2\pi] \\ \dfrac{e^{i\theta(n+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1} \end{cases}$$

Or on a :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad \theta \not\equiv 0[2\pi], \frac{e^{i\theta(n+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}}\left(e^{\frac{i\theta(n+1)}{2}} - e^{-\frac{i\theta(n+1)}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$= e^{n\frac{i\theta}{2}} \frac{2i\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= e^{n\frac{i\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ainsi on a :

$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = Re\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^{k}\right) = \begin{cases} n+1 \; si \; \theta \equiv 0[2\pi] \\ \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \; sinon \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, A_n(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \begin{cases} n+1 \; si \; x \equiv 0[\pi] \\ \cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

3) Il suffit de voir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A_n + B_n = n+1 \\ A_n(x) - B_n(x) = \begin{cases} n+1 \; si \; x \equiv 0[\pi] \\ \cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases} \end{cases}$$

1er cas : SI $x \equiv 0[\pi]$

On a alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A_n + B_n = n+1 \\ A_n - B_n = n+1 \end{cases}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \begin{cases} A_n = n+1 \\ B_n = 0 \end{cases}}$$

Remarque : Cela est logique car :

$$x \equiv 0[\pi] \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0; n]\!], \sin^2(kx) = 0 \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = 0$$

Et de plus :

$$x \equiv 0[\pi] \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0; n]\!], \cos^2(kx) = 1 \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = n+1$$

2ième cas : SI $x \not\equiv 0[\pi]$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} A_n + B_n = n+1 \\ A_n - B_n = \cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \begin{cases} A_n = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \\ B_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\cos(nx) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \end{cases}}$$