# Entrainement DS 3

## Exercice 1 : Un peu de complexe

On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto \dfrac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5} \end{cases}$$

1) Déterminer l'image de $1+i$.
2) a) Résoudre l'équation $\sin(\theta) = 0$.
b) En déduire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
c) Montrer que f n'est pas injective.
3) On va montrer dans cette question que f n'est pas surjective.
a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
b) On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(z) = Q\left(\frac{x}{y}\right)$.
c) Etudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$ $Q: x \mapsto 5x^4 - 10x^2 + 1$.
d) En déduire la valeur de :

$$m = \min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}} \frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5} = \min\left(\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)$$

e) Déterminer $f^{-1}(\{m\})$.
f) Montrer que f n'est pas surjective.

## Exercice 2 : Une intégrale

On cherche à calculer :

$$I = \int_0^1 \sqrt{-4x^2 + 4x + 13}\,dx$$

1) Expliquer pourquoi l'intégrale est bien définie.
2) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que :

$$I = \sqrt{13} + \int_0^1 \frac{4x^2 - 2x}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}}\,dx$$

3) On pose :

$$J = \int_0^1 \frac{4x^2 - 2x}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}}\,dx$$

a) Démontrer que :

$$J = -I - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-8x + 4}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}}\,dx + \int_0^1 \frac{14}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}}\,dx$$

b) Calculer :

$$\int_0^1 \frac{-8x + 4}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}}\,dx$$

c) A l'aide du changement de variable $u = \frac{2x}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}}$, démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{14}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}}\,dx = \alpha \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\,dx$$

Où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres à déterminer.
4) Déterminer la valeur de I.

**Problème 1 : Plusieurs sommes**

**Partie A : $\boldsymbol{\ell} \in \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}\}$**

Dans tout cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(\ell) = \sum_{k=0}^{n} k^{\ell} \binom{n}{k}$$

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1+x)^n$$

2) En déduire la valeur de $S_n(0)$.

3) En utilisant la dérivabilité de $f_n$ sur $\mathbb{R}$, démontrer que :

$$S_n(1) = n2^{n-1}$$

4) a) De la même façon démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(2) - S_n(1) = n(n-1)2^{n-2}$$

b) En déduire la valeur de $S_n(2)$.

**Partie B : Somme et intégrale**

1) a) Calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx$$

b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

2) Dans cette question on cherche la valeur de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$$

b) Démontrer à l'aide d'une IPP que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1} dx$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \times \frac{1}{2n+1}$$

d) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) \cos^{2n+1}(t)\, dt = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \times \frac{1}{4n+2}$$

## Problème 2 : Une intégrale

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{cases}$$

**Partie A : Etude d'une bijection**

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Démontrer que f est impaire.

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

4) Démontrer que f réalise une bijection de f dans un ensemble à déterminer.

5) Démontrer que :

$$f^{-1} = \mathrm{sh}$$

**Partie B : Une intégrale à calculer**

On cherche dans cette partie à calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

1) A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x+1}$ démontrer que :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}\,du$$

2) Déterminer la forme canonique de $u^2 - u + 1$

3) En déduire que :

$$I = \frac{1}{2}\ln(3)$$

## Problème 3 : Somme et intégrale

Dans cet exercice on cherche à calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2k}{k}(4k+2)}$$

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

**Partie A : Une intégrale à paramètres**

1) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 1, I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1,q+1)$$

2) En déduire que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I(p,q) = \frac{1}{\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

3) A l'aide du changement de variable $x = \sin^2(t)$, démontrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt = \frac{1}{2\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

**Partie B : La limite**

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt$$

1) Démontrer que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t) \leq \frac{1}{2}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

Où $g_n$ est une fonction à déterminer.

b) Démontrer que :

$$\lim_{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt = 0$$

Dans cette question on rappelle le résultat suivant vu en terminale (Il est vivement conseillé de l'utiliser) :

Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^0([a,b])\right)^2$. On a alors :

$$\forall t \in [a,b], f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

3) On cherche à calculer :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

a) A l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$, démontrer que :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2n}{n}(4n+2)}$$