Correction Entrainement DS 3

Exercice 1 : Un peu de complexe

On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ z\mapsto\dfrac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}\end{cases}$$

1) Déterminer l'image de $1+i$.
2) a) Résoudre l'équation $\sin(\theta)=0$.
b) En déduire l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$.
c) Montrer que f n'est pas injective.
3) On va montrer dans cette question que f n'est pas surjective.
a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
b) On pose $z=x+iy,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $f(z)=Q\left(\frac{x}{y}\right)$.
c) Etudier la fonction suivante sur $\mathbb{R}$ $Q:x\mapsto 5x^4-10x^2+1$.
d) En déduire la valeur de :

$$m=\min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}=\min\left(\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5},z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)$$

e) Déterminer $f^{-1}(\{m\})$.
f) Montrer que f n'est pas surjective.

1) On sait que :

$$(1+i)^5=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^5=4\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}\Longrightarrow\mathcal{Im}((1+i)^5)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=-4$$

De plus on sait que $\mathcal{Im}(1+i)=i\Longrightarrow\left(\mathcal{Im}(1+i)\right)^5=\mathcal{Im}(i^5)=1$
On en déduit donc que :

$$f(1+i)=-4$$

2) a) On sait que :

$$\sin(\theta)=0\Leftrightarrow\theta=n\pi,n\in\mathbb{Z}$$

b) On sait que :

$$f^{-1}(\{0\})=\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\mathcal{Im}(z^5)=0\}$$

On pose $z=re^{i\theta}$. On a alors :

$$\mathcal{Im}(z^5)=r^5\sin(5\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{Im}(z^5)=0\Leftrightarrow\sin(5\theta)=0\Leftrightarrow\theta=\frac{n\pi}{5},n\in\mathbb{Z}$$

De plus ici $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, donc $\theta\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$
On pose $A=\{5k,k\in\mathbb{Z}\}$ =l'ensemble des multiples de 5.
On en déduit donc que :

$$f^{-1}(\{0\})=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\arg(z)=\frac{n\pi}{5},n\in\mathbb{Z}\backslash A\right\}$$

c) On a :

$$f\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)=0=f\left(e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)$$

Donc f n'est pas injective.
3) a) On sait que :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C},\forall n\in\mathbb{N},(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

b) On sait que :

$$(x+iy)^5=x^5+5x^4iy-10x^3y^2-10x^2iy^3+5xy^4+iy^5$$

On en déduit donc que :

$$f(x+iy)=\frac{5x^4y-10x^2y^3+y^5}{y^5}=5\left(\frac{x}{y}\right)^4-10\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=Q\left(\frac{x}{y}\right)\text{ avec } Q(X)=5X^4-10X^2+1$$

c) On sait que $Q\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}, Q'(x)=20x^3-20x=20x(x^2-1)$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$Q'(x)$		$-$	0		0		0	$+$	
Q	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

d) On en déduit donc que :

$$m=\min_{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5}=\min\left(\frac{\mathcal{Im}(z^5)}{\mathcal{Im}(z)^5},z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}\right)=-4$$

e) On a :

$$f^{-1}(\{m\})=\{z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},f(z)=-4\}=\{x+ix,x-ix,x\neq0\}$$

f) On sait que :

$$f^{-1}(\{-5\})=\emptyset$$

On en déduit donc que f n'est pas surjective.

Exercice 2 : Une intégrale

On cherche à calculer :

$$I=\int_0^1\sqrt{-4x^2+4x+13}\,dx$$

1) Expliquer pourquoi l'intégrale est bien définie.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que :

$$I=\sqrt{13}+\int_0^1\frac{4x^2-2x}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

3) On pose :

$$J=\int_0^1\frac{4x^2-2x}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

a) Démontrer que :

$$J=-I-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{-8x+4}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx+\int_0^1\frac{14}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

b) Calculer :

$$\int_0^1\frac{-8x+4}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

c) A l'aide du changement de variable $u=\frac{2x}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{14}}$, démontrer que :

$$\int_0^1\frac{14}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx=\alpha\int_{-\beta}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}dx$$

Où α et β sont des nombres à déterminer.

4) Déterminer la valeur de I.

1) On résout :

$$4x^2-4x-13=(2x-1)^2-14$$

On en déduit que $f: x\mapsto\sqrt{-4x^2+4x+13}$ est définie (et continue) si et seulement si :

$$(2x-1)^2-14<0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{14}}{2}\le x\le\frac{2+\sqrt{14}}{2}$$

Or on sait que :

$$[0;1]\subset\left[\frac{2-\sqrt{14}}{2};\frac{2+\sqrt{14}}{2}\right]$$

On en déduit donc que I existe.

2) On a :

$$I=\int_0^1\sqrt{-4x^2+4x+13}dx=\int_0^1 1\times\sqrt{-4x^2+4x+13}dx$$

On pose :

$$\begin{cases} u'(x)=1\\ v(x)=\sqrt{-4x^2+4x+13}\end{cases} \text{ et } \begin{cases} u(x)=x\\ v'(x)=\dfrac{-4x+2}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 1\times\sqrt{-4x^2+4x+13}dx=\left[x\sqrt{-4x^2+4x+13}\right]_0^1-\int_0^1 x\times\frac{-4x+2}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

$$=\sqrt{13}+\int_0^1\frac{4x^2-2x}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

3) a) On sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 4x^2-2x=-(-4x^2+4x+13)+2x+13$$
$$=-(-4x^2+4x+13)-\frac{1}{4}(-8x+4)+14$$

On en déduit donc que :

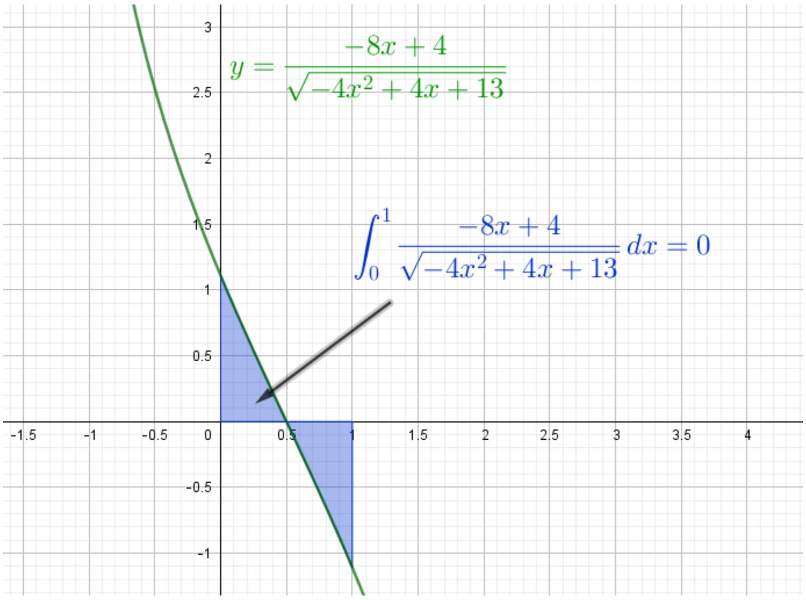
$$J=\int_0^1\frac{4x^2-2x}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx=-\int_0^1\frac{-4x^2+4x+13}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{-8x+4}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx+\int_0^1\frac{14}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

$$=-\int_0^1\sqrt{-4x^2+4x+13}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{-8x+4}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx+\int_0^1\frac{14}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

$$=-I-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{-8x+4}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx+\int_0^1\frac{14}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx$$

b) On sait que :

$$\int_0^1\frac{-8x+4}{\sqrt{-4x^2+4x+13}}dx=\left[2\sqrt{-4x^2+4x+13}\right]_0^1=2\sqrt{13}-2\sqrt{13}=0$$



c) On pose $u = \frac{2x}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}}$

_ On change les bornes

$$x = 0 \Longrightarrow u = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$
$$x = 1 \Longrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

_ On calcule le dx

On sait que :

$$u = \frac{2x}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{14}u + 1}{2} = x$$

Or on sait que $x: u \mapsto \sqrt{14}u + 1 \in \mathcal{C}^1\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}\right]\right)$ et :

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{14} \Longrightarrow dx = \sqrt{14}du$$

_ On remplace

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}; -4x^2 + 4x + 13 = 14 - (2x-1)^2 = 14\left(1 - \frac{(2x-1)^2}{14}\right) = 14\left(1 - \left(\frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2\right)$$

On en déduit donc que :

$$\sqrt{-4x^2 + 4x + 13} = \sqrt{14} \times \sqrt{1 - u^2}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^1 \frac{14}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}} dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{14}}}^{\frac{1}{\sqrt{14}}} \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{\sqrt{14}}{2} du = 7 \int_{-\frac{1}{\sqrt{14}}}^{\frac{1}{\sqrt{14}}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

On en déduit donc que $\alpha = 14$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$

4) On sait que :

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{14}}}^{\frac{1}{\sqrt{14}}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = [\arcsin(u)]_{-\frac{1}{\sqrt{14}}}^{\frac{1}{\sqrt{14}}} = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \Longrightarrow \int_0^1 \frac{14}{\sqrt{-4x^2 + 4x + 13}} dx = 14\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$I = \sqrt{13} + J = \sqrt{13} - I + 14\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\Longrightarrow I = \int_0^1 \sqrt{-4x^2+4x+13}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{13} + 7\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

Problème 1 : Plusieurs sommes

Partie A : $\boldsymbol{\ell} \in \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}\}$

Dans tout cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(\ell) = \sum_{k=0}^{n} k^{\ell} \binom{n}{k}$$

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{cases}$$

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (1+x)^n$$

2) En déduire la valeur de $S_n(0)$.

3) En utilisant la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}$, démontrer que :

$$S_n(1) = n2^{n-1}$$

4) a) De la même façon démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(2) - S_n(1) = n(n-1)2^{n-2}$$

b) En déduire la valeur de $S_n(2)$.

Partie B : Somme et intégrale

1) a) Calculer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx$$

b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

2) Dans cette question on cherche la valeur de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n dx$$

b) Démontrer à l'aide d'une IPP que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1} dx$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \times \frac{1}{2n+1}$$

d) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t) \cos^{2n+1}(t)\, dt = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \times \frac{1}{4n+2}$$

Partie A : $\ell \in \{0;1;2\}$

1) On sait que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = (1+x)^n$$

2) On a :

$$S_n(0) = f_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

3) On sait que $f_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

On en déduit donc que :

$$f_n'(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

4) a) De plus on sait que $f_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

On en déduit donc que :

$$f_n''(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = S_n(2) - S_n(1) = n(n-1)2^{n-2}$$

b) On en déduit donc que :

$$S_n(2) = S_n(1) + n(n-1)2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

Partie B : Somme et intégrale

1) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2) a) On sait que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n (1-x)^n dx &= \int_0^1 x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{n+k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}
\end{aligned}$$

b) On a :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \underbrace{\left[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}dx$$

$$= \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}dx$$

c) En réitérant le procédé on a :

$$u_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}dx = \frac{n}{n+1}\times\frac{n-1}{n+2}\int_0^1 x^{n-2}(1-x)^{n+2}dx$$

$$= \frac{n!}{(2n)\times(2n-1)\times\ldots\times(n+1)}\int_0^1 x^0(1-x)^{2n+1}dx = \frac{n!\,(n)!}{(2n)!}\left[-\frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{n+k+1} = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$$

d) On a :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$$

On pose le changement de variable $x = \sin^2(t)$

a) On change les bornes

$$t = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 1$$

b) On calcule le dx

On sait que $x: t \mapsto \sin^2(t) \in \mathcal{C}^1\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$ et :

$$\frac{dx}{dt} = 2\sin(t)\cos(t) \Longrightarrow dx = 2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

c) On remplace :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(t))^n(1-\sin^2(t))^n\,2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$$

d) On conclut

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt = \frac{1}{\binom{2n}{n}(4n+2)}$$

Problème 2 : Une intégrale

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{cases}$$

Partie A : Etude d'une bijection

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Démontrer que f est impaire.

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

4) Démontrer que f réalise une bijection de f dans un ensemble à déterminer.

5) Démontrer que :

$$f^{-1} = \mathrm{sh}$$

Partie B : Une intégrale à calculer

On cherche dans cette partie à calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

1) A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x+1}$ démontrer que :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}du$$

2) Déterminer la forme canonique de $u^2 - u + 1$

3) En déduire que :

$$I = \frac{1}{2}\ln(3)$$

Partie A : Etude d'une bijection

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > x^2$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > |x| \geq -x$$
$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} + x > 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \ln\left(\sqrt{1+(-x)^2} + (-x)\right) = \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right) = -\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) = -f(x)$$

On en déduit donc que f est impaire.

3) On étudie f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \geq 0, f(x) = \ln(u(x)) \text{ avec } u : x \mapsto \sqrt{x^2+1} + x$$

On sait que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \geq 0, u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1 = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{1\sqrt{x^2+1}}$$

4) On cherche à présent la limite de f en $+\infty$.

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ (par composée)}$$

Par imparité on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

On sait que f est :

- Continue sur $\mathbb{R}$
- Strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire ou le théorème de la bijection), on a :

$$\forall y\in\mathbb{R}, \exists!\, x\in\mathbb{R}, f(x)=y$$

On en déduit que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5) On peut le faire de différentes méthodes.

Méthode 1 : On calcule :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(\mathrm{sh}(x))=\ln\left(\mathrm{sh}(x)+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(x)}\right)=\ln(\mathrm{sh}(x)+\mathrm{ch}(x))=\ln(e^x)=x$$

On en déduit donc que $f^{-1}=\mathrm{sh}$ car f est bijective.

Méthode 2 : On résout :

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2}=e^y \Leftrightarrow 1+x^2=(e^y-x)^2 \Leftrightarrow 1=e^{2y}-2xe^y$$

On en déduit donc que :

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\mathrm{sh}(y)$$

On en déduit donc que $f^{-1}=\mathrm{sh}$.

Partie B : Une intégrale à calculer

1) On cherche :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

On pose $u=\frac{1}{x+1}$

_ On calcule les bornes

$$x=0 \Longrightarrow u=1$$
$$x=1 \Longrightarrow u=\frac{1}{2}$$

_ Calcul du du

On sait que $x: u\mapsto \frac{1}{u}-1 \in \mathcal{C}^1\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)$ et :

$$\frac{dx}{du}=-\frac{1}{u^2} \Longrightarrow dx=-\frac{1}{u^2}du$$

_ On remplace

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{u}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}-1\right)^2+\left(\frac{1}{u}-1\right)+1}}-\frac{1}{u^2}du$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u\sqrt{\frac{1-2u+u^2-u}{u^2}}}du=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}du$$

2) On sait que :

$$\forall u\in\mathbb{R}, u^2-u+1=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{u^2-u+1}}du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}du$$

Ici on peut faire un changement de variable ou bien directement utiliser la dérivée de la fonction :

$$x \mapsto \ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)$$

On a alors :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}du = \left[\ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)-\ln(1) = \ln\left(\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3)$$

Problème 2 : Somme et intégrale

Dans cet exercice on cherche à calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2k}{k}(4k+2)}$$

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$$

Partie A : Une intégrale à paramètres

1) A l'aide d'une intégration par partie démontrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 1, I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1,q+1)$$

2) En déduire que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I(p,q) = \frac{1}{\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

3) A l'aide d'un changement de variable, démontrer que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt = \frac{1}{2\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

Partie B : La limite

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\cos^{2n+1}(t)\,dt$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}dt$$

Où g_n est une fonction à déterminer.

2) a) Démontrer que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t) \leq \frac{1}{2}$$

b) Démontrer que :

$$\lim_{n} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt = 0$$

3) On cherche à calculer :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

a) A l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$, démontrer que :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+x^2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2n}{n}(4n+2)}$$

Partie A : Une intégrale à paramètres

1) On sait que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 1, I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \underbrace{\left[-x^p\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{p}{q+1}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+1}dx$$

$$= \frac{p}{q+1} I(p-1,q+1)$$

2) On peut faire cette question de deux façons.

Méthode 1 : On réitère le procédé de calcul

On sait que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 1, I(p,q) = \frac{p}{q+1} I(p-1,q+1) = \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} I(p-2,q+2)$$

$$= \frac{p!}{(q+p)\times \dots \times (q+1)} I(0;p+q) = \frac{p!\,q!}{(q+p)!}\int_0^1 (1-x)^{q+p}dx = \frac{p!\,q!}{(q+p)!}\left[-\frac{(1-x)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\frac{(q+p)!}{p!\,(p+q-p)!}} \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \times \frac{1}{p+q+1}$$

3) On pose le changement de variable $x = \sin^2(t)$

a) On change les bornes

$$t = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = 1$$

b) On calcule le dx

On sait que $x: t \mapsto \sin^2(t) \in \mathcal{C}^1\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$ et :

$$\frac{dx}{dt} = 2\sin(t)\cos(t) \Longrightarrow dx = 2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

c) On remplace :

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(t))^p(1-\sin^2(t))^q\, 2\cos(t)\sin(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt = \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \times \frac{1}{p+q+1}$$

d) On conclut

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t)\cos^{2q+1}(t)\,dt = \frac{1}{2\binom{p+q}{p}} \times \frac{1}{p+q+1}$$

Partie B : La limite

1) On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \leq \frac{1}{2}$$

2) a) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}(t)\cos^{2k+1}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t) \sum_{k=0}^{n} (\sin^2(t)\cos^2(t))^k\,dt$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin(t)\cos(t) < \frac{1}{2} \Longrightarrow \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \sin^2(t)\cos^2(t) \neq 1$$

On en déduit donc que :

$$= \sum_{k=0}^{n} (\sin^2(t)\cos^2(t))^k = \frac{1-(\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1}}{1-\sin^2(t)\cos^2(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\left(\frac{1-(\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1}}{1-\sin^2(t)\cos^2(t)}\right)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1}}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

Avec g_n définie par :

$$g_n : \begin{cases} \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (\sin^2(t)\cos^2(t))^{n+1} \end{cases}$$

b) On sait que :

$$\forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2} \leq \frac{g_n(t)}{1-\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{3}$$

On en déduit donc que :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{\pi}{6}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{4} \in]-1;1[$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g_n(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt$$

3) a) On pose $u = cos(2t)$

_ Calcul des bornes

$$t = 0 \Rightarrow u = 1$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = -1$$

_ On sait que $u: t \mapsto \cos(2t)$ est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\frac{du}{dt} = -2\sin(2t) \Rightarrow du = -2\sin(2t)\,dt = -4\sin(t)\cos(t)\,dt$$
$$\Rightarrow \sin(t)\cos(t)\,dt = -\frac{1}{4} \times -4\sin(t)\cos(t)\,dt = -\frac{1}{4}du$$

_ On remplace :

On sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$
$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2(t) = \cos(2t)$$
$$\Rightarrow \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

De même on a :

$$2\cos^2(t) - 1 = \cos(2t) \Rightarrow \cos^2(t) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 1-(\sin(t)\cos(t))^2 = 1 - \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) = \frac{1}{4}(4 - 1 + \cos^2(t)) = \frac{1}{4}(3+u^2)$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt = 4\int_1^{-1} \frac{-\frac{1}{4}du}{3+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2}$$

b) On sait par parité que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

De plus on sait que :

$$\int_0^1 \frac{du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}du}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

On en déduit donc que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)\cos(t)}{1-(\sin(t)\cos(t))^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{du}{3+u^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

De plus on sait d'après la question 3 de la partie A que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1}(t) \cos^{2q+1}(t)\, dt = \frac{1}{2\binom{p+q}{p}(p+q+1)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1}(t) \cos^{2k+1}(t)\, dt = \frac{1}{2\binom{2k}{k}(2k+1)}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2k}{k}(4k+2)} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$