Correction DS n°3

Exercice 1 : Une nouvelle valeur de cosinus et sinus

Dans cet exercice on pose :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} \; et \; x = \omega + \frac{1}{\omega}$$

1) Déterminer la forme algébrique de x.
2) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$$

3) En déduire que $x^2 + x - 1 = 0$
4) En déduire la valeur de :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \; et \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

1) On a :

$$\boxed{x = \omega + \frac{1}{\omega} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + \frac{1}{e^{\frac{2i\pi}{5}}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$$

2) On sait que $\omega \neq 1$ donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{4} \omega^k = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = \frac{e^{2i\pi} - 1}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = \frac{1 - 1}{e^{\frac{2i\pi}{5}} - 1} = 0}$$

3) On a :

$$x^2 + x - 1 = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} + 2 + \omega + \frac{1}{\omega} - 1 = \frac{1}{\omega^2}(\omega^4 + 1 + \omega^3 + \omega) + 1$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0 \Longrightarrow \omega^4 + 1 + \omega^3 + \omega = -\omega^2$$

$$\boxed{\Longrightarrow x^2 + x - 1 = \frac{1}{\omega^2}(-\omega^2) + 1 = 0}$$

4) On résout :

$$x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 5 \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \quad ou \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

De plus on sait que :

$$\frac{2\pi}{5} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\Longrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

De plus on sait que :

$$\frac{2\pi}{5} \in]0; \pi[\Longrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{16-(6-2\sqrt{5})}}{4}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

Problème 1 : Une intégrale !!

Partie A : Etude d'une fonction

1) On pose la fonction

$$f: x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) a) Déterminer la dérivée de f sur $[1;2]$ et en déduire que f réalise une bijection de $[1;2]$ dans I où I est un intervalle à déterminer.

b) Déterminer la bijection réciproque de $f|_{[1;2]}$.

Partie B : Un changement de variable

Dans cet exercice on cherche à calculer :

$$I=\int_1^2 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$$

1) On pose le changement de variable suivant :

$$u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

a) Démontrer que :

$$I=12\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2}{1-u^4}\,du$$

b) Déterminer les deux réels a et b tel que :

$$\forall u \in \left[0\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right], \frac{u^2}{1-u^4}=\frac{a}{1-u^2}+\frac{b}{1+u^2}$$

c) En déduire la valeur de I

Partie A : 1) f est définie si et seulement si :

$$\frac{x-1}{x+1}\geq 0$$

On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathcal{D}_f=]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[}$$

2) a) On sait que f est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ par composée de fonctions dérivables et :

On pose :

$$u(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

On a alors :

$$u'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\forall x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[, f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{(x+1)^2} \times \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 0$$

On a donc :

x	1	2
$f'(x)$	$+$	
f	0 $\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

On a donc :

- **f est continue sur $[1;2]$**
- **f est strictement croissante sur $[1\,;2]$**
- $\mathbf{f(1) = 0}$ **et** $\mathbf{f(2) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f réalise une bijection de [1,2] dans $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

b) On pose : $y \in \left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Il suffit de résoudre :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = y^2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = y^2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x(1-y^2) = y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2+1}{1-y^2} \ \textbf{car } \mathbf{y \neq 1} \textbf{ et } \mathbf{y \neq -1}$$

On a donc :

$$f|_{[1;2]}^{-1} : \begin{cases} \left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \to [1,2] \\ x \mapsto \frac{x^2+1}{1-x^2} \end{cases}$$

Partie B :

1)

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

- **On change les bornes :**

$$x = 1 \Rightarrow u = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- **Calcul du dx :**

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x = \frac{u^2+1}{1-u^2}$$

$$u \mapsto \frac{u^2+1}{u^2-1} \in \mathcal{D}\left(\left[0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]\right)$$

On a alors :

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u(1-u^2)+2u(u^2+1)}{(1-u^2)^2} = \frac{4u}{(1-u^2)^2}$$

- On a alors:

$$\mathbf{I = \int_1^2 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 3\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{\frac{u^2+1}{u^2-1}} \times u \times \frac{4u}{(1-u^2)^2}du = 12\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2}{1-u^4}du}$$

b)

$$\forall u \in \left[0\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right], \frac{u^2}{1-u^4} = \frac{a}{1-u^2} + \frac{b}{1+u^2} = \frac{a(1+u^2)+b(1-u^2)}{1-u^4} = \frac{u^2(a-b)+a+b}{1-u^4}$$

On identifie :

$$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathbf{\frac{u^2}{1-u^4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u^2}}$$

On a :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u^2}du = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(1+u)(1-u)}du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1+u+(1-u)}{(1+u)(1-u)}du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u}du + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+u}du$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln(1-u)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{1}{2}[\ln(1+u)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \ln\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(3+\sqrt{3}) - \ln(3-\sqrt{3})\right)$$

$$\mathbf{\Longrightarrow \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)}$$

Or on a :

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{6} = 2+\sqrt{3}$$

On a donc :

$$\mathbf{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})}$$

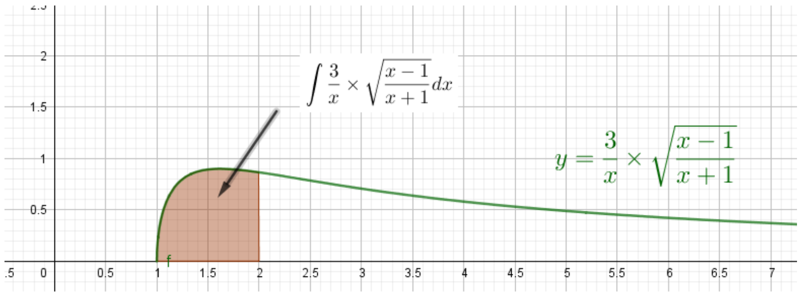
d) On a :

$$I = 12\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2}{1-u^4}du = 6\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u^2}du - 6\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+u^2}du$$

$$= 3\ln(2+\sqrt{3}) - 6\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 3\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{6\pi}{6} = 3 \times \ln(2+\sqrt{3}) - \pi$$

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{I = \int_1^2 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = 3 \times \ln(2+\sqrt{3}) - \pi}}$$



Problème 2 : Une suite d'intégrale

Partie A : Une nouvelle fonction

On définit la fonction th par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1) Démontrer que l'ensemble de définition de th est $\mathbb{R}$.
2) a) Déterminer la limite de th en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) En déduire d'éventuelles asymptotes.
3) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$$

b) En déduire les variations de th.
4) Montrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans]-1 ;1[et déterminer sa réciproque, noté th^{-1} ou argth.

Partie B : Une suite sympa
Dans toute la suite on définit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)} dt$$

1) Déterminer la valeur de I_0.
2) Montrer que :

$$I_1 = \frac{\pi}{6}$$

3) En utilisant les notations de la partie A, montrer que :

$$I_2 = \frac{1}{2}$$

4) En utilisant le fait que :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)} \times \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$$

Puis en utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2(n+1)} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{n}{n+1} I_n$$

5) En déduire la valeur de I_3 puis de I_4.

Partie A : On pose :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1) On sait que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x + e^{-x} > 0$$

Donc th est définie sur $\mathbb{R}$.

2) a) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Par imparité de la fonction th :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(-x) = -\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = -1}$$

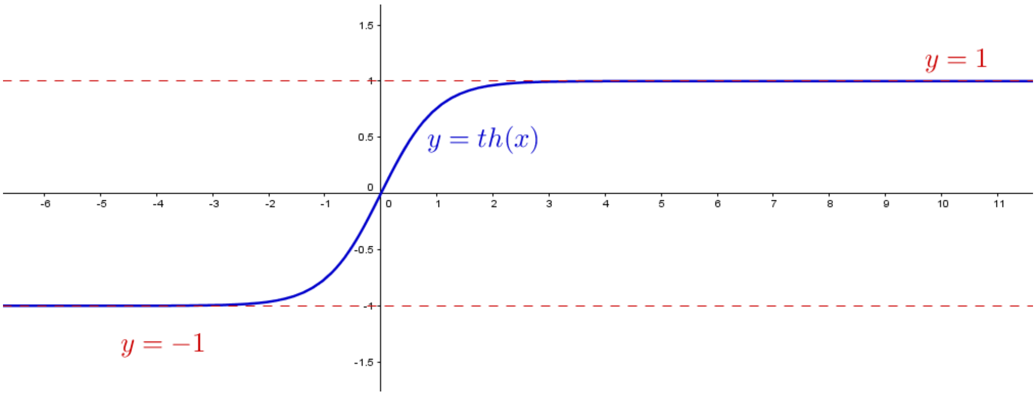
b) La courbe représentative de th admet donc **deux asymptotes horizontales** d'équation **y = 1 en +∞ et y = -1 en -∞.**

3) a) On sait que la fonction exponentielle est dérivable sur ℝ donc th est dérivable sur ℝ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0}$$

b) On en déduit donc que th est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$		$+\infty$
$th'(x)$		$+$	
th	-1	$\nearrow 0 \nearrow$	1



4) th est continue et strictement croissante de ℝ dans]-1 ;1[. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, th réalise une bijection de ℝ dans]-1 ;1[.

Soit $y \in]-1;1[$. On résout :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{th}(x) = y \ (y \in]-1;1[) \\
&\Longleftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\
&\Longleftrightarrow e^x(1-y) = e^{-x}(1+y) \\
&\Longleftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \ \ (\text{car } e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}) \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \ \ (\text{car } y \in]-1;1[)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathrm{th}^{-1} : \begin{cases}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \end{cases}}$$

Partie B :

1) On a :

$$\boxed{\mathbf{I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^0(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} dt = [t]_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} = \frac{1}{2}\ln(3)}}$$

2)

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^1(t)} dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt = [2\arctan(e^t)]_0^{\frac{1}{2}\ln(3)}$$

$$\Longrightarrow I_1 = 2\arctan(\sqrt{3}) - 2\arctan(1) = 2\times\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^1(t)} dt = \frac{\pi}{6}}}$$

3) On a :

$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^2(t)} dt = [th(t)]_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} = th\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) - th(0) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}$$

$$\Longrightarrow I_2 = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^2(t)} dt = \frac{1}{2}}}$$

4) On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^{n+2}(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \underbrace{\frac{1}{ch^n(t)}}_{u(t)} \times \underbrace{\frac{1}{ch^2(t)}}_{v'(t)} dt = \left[\underbrace{\frac{1}{ch^n(t)}}_{u(t)} \underbrace{th(t)}_{v(t)}\right]_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} - \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \underbrace{\frac{-nsh(t)}{ch^{n+1}(t)}}_{u'(t)} \times \underbrace{th(t)}_{v(t)}\ dt$$

$$\Longrightarrow I_{n+2} = \frac{1}{ch^n\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)} th\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) + n\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{sh(t)th(t)}{ch^{n+1}(t)} dt$$

Or on sait que :

$$\frac{sh(t)th(t)}{ch^{n+1}(t)} = \frac{sh(t)\frac{sh(t)}{ch(t)}}{ch^{n+1}(t)} = \frac{sh^2(t)}{ch^{n+2}(t)} = \frac{ch^2(t) - 1}{ch^{n+2}(t)} = \frac{1}{ch^n(t)} - \frac{1}{ch^{n+2}(t)}$$

On a donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{sh(t)th(t)}{ch^{n+1}(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{ch^n(t)} - \frac{1}{ch^{n+2}(t)} dt = I_n - I_{n+2}$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^n\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)} \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) + n(I_n - I_{n+2})$$

Or on sait que :

$$\mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathrm{ch}^n\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \left(\frac{e^{\frac{1}{2}\ln(3)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(3)}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

On a donc :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^n\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)} \mathrm{th}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + nI_n - nI_{n+2}$$

$$\Longrightarrow (n+1)I_{n+2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + nI_n$$

$$\boxed{\Longrightarrow \mathbf{I_{n+2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2(n+1)}} \times \left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n+1}}\mathbf{I_n}}$$

5) On a donc pour n = 1 dans l'égalité précédente :

$$\boxed{\mathbf{I_3} = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ch^3(t)}}\,\mathbf{dt} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{8}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{I_1} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{8}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}}$$

On a donc pour n = 2 dans l'égalité précédente :

$$\boxed{\mathbf{I_4} = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ch^4(t)}}\,\mathbf{dt} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{24}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{I_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{24}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{24}}}$$