DS 3 - PCSI 2023-2024
Le 5 décembre 2023

On attachera la plus grande importance à la ***clarté*** *et à la* ***précision*** *de la rédaction, ainsi qu'à la* ***propreté*** *de la présentation, et on veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on pourra le signaler sur sa copie et poursuivre la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.*

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent donc être traités dans ***n'importe quel ordre****. Au cours d'un exercice, lorsque l'on ne peut pas répondre à une question, il est* ***vivement recommandé*** *de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.*

La calculatrice est interdite

Exercice 1 : Une nouvelle valeur de cosinus et sinus

Dans cet exercice on pose :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} \text{ et } x = \omega + \frac{1}{\omega}$$

1) Déterminer la forme algébrique de x.
2) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$$

3) En déduire que $x^2 + x - 1 = 0$
4) En déduire la valeur de :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Problème 1 : Une intégrale

Partie A : Etude d'une fonction

1) On pose la fonction

$$f: x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) a) Déterminer la dérivée de f sur $[1; 2]$ et en déduire que f réalise une bijection de $[1; 2]$ dans I où I est un intervalle à déterminer.
b) Déterminer la bijection réciproque de $f|_{[1;2]}$.

Partie B : Un changement de variable

Dans cet exercice on cherche à calculer :

$$I = \int_1^2 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$$

1) On pose le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

a) Démontrer que :

$$I = 12\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{u^2}{1-u^4}\,du$$

b) Déterminer les deux réels a et b tel que :

$$\forall u \in \left[0\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right], \frac{u^2}{1-u^4} = \frac{a}{1-u^2} + \frac{b}{1+u^2}$$

c) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1-u^2}\,du = \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

d) En déduire que :

$$I = \int_1^2 \frac{3}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = 3 \times \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \pi$$

Problème 2 : Une suite d'intégrale

Partie A : Une nouvelle fonction

On définit la fonction th par :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1) Démontrer que l'ensemble de définition de th est $\mathbb{R}$.
2) a) Déterminer la limite de th en $+\infty$ et en $-\infty$.
b) En déduire d'éventuelles asymptotes.
3) Déterminer les variations de th.
4) Montrer que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans]-1 ;1[et déterminer sa réciproque, noté th^{-1} ou argth.

Partie B : Une suite sympa

Dans toute la suite on définit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(3)} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)}\,dt$$

1) Déterminer la valeur de I_0.
2) Montrer que :

$$I_1 = \frac{\pi}{6}$$

*(**Indication** : On pourra faire un changement de variable $u = e^t$).*

3) En utilisant les notations de la partie A, montrer que :

$$I_2 = \frac{1}{2}$$

4) En utilisant le fait que :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^{n+2}(t)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^n(t)} \times \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}$$

Puis en utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2(n+1)} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{n}{n+1} I_n$$

5) En déduire la valeur de I_3 puis de I_4.