

Correction DM n°4

Exercice 1 : Une approximation de $\sqrt{2}$ **Méthode de Newton-Raphson**

Dans cette exercice on pose :

$$f(x) = x^2 - 2$$

1) Résoudre $f(x) = 0$.

2) Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en utilisant la courbe de la fonction f .

On pose $u_0 = 2$, $A_0(u_0; f(u_0))$ le point de la courbe d'abscisse u_0 et T_{u_0} la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = u_0$.

De plus on pose u_1 l'abscisse de l'intersection entre (T_{u_0}) et l'axe des abscisses. On réitère ensuite le procédé ! Le schéma ci-contre illustre la construction de la suite (u_n) .

- Déterminer l'équation de (T_{u_0}) .
- En déduire que $u_1 = 1,5$.
- Reproduire sur votre copie la courbe de f sur l'intervalle $[1; 3]$ avec la tangente ci-contre.
- De même on pose $A_1(u_1; f(u_1))$ le point de la courbe d'abscisse u_1 et T_{u_1} la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = u_1$ et u_2 l'abscisse de l'intersection entre T_{u_1} et l'axe des abscisses. Construire u_2 sur votre figure puis déterminer sa valeur.

3) De même on construit ainsi de proche en proche une suite (u_n) intersection de la tangente au point d'abscisse précédent et de l'axe des abscisses.

a) Montrer que la tangente à pour équation :

$$(T_{u_n}): y = 2u_n x - u_n^2 - 2$$

b) En déduire que la suite est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \end{cases}$$

4) a) Démontrer que (u_n) est positive.

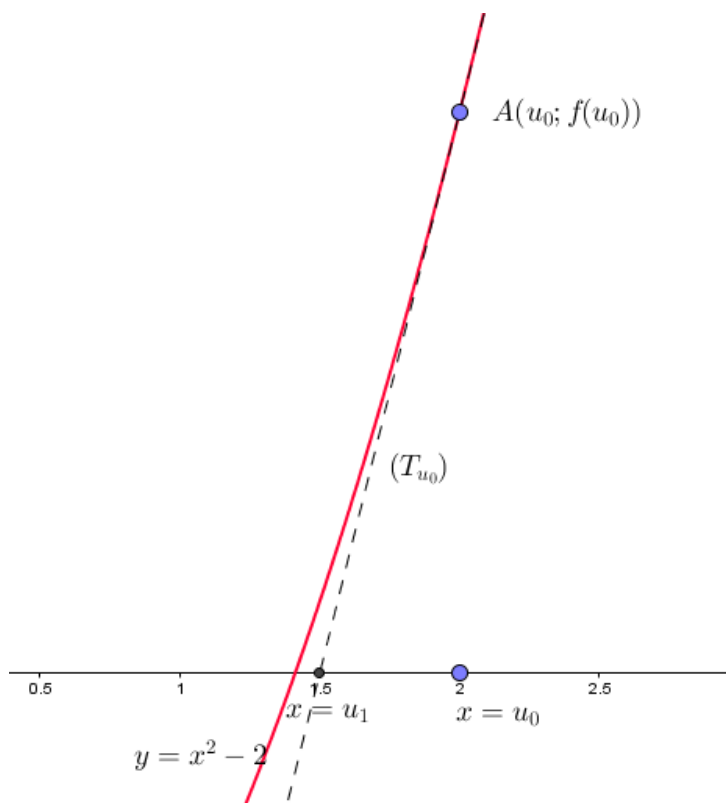
b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{2})^2$$

c) En déduire que (u_n) est minorée.

d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

e) En déduire que la suite (u_n) converge puis déterminer sa limite.



1) On a : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$

2) a) On sait que pour tout a réel :

$$(T_a): y = f'(a)(x - a) + f(a) \Rightarrow (T_2): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

Or ici $f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$ et de plus $f(2) = 2$. Ainsi on a :

$$T_2: y = 4(x - 2) + 2 = 4x - 6$$

b) u_1 est la valeur de x tel que $4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$

d) On a de même :

$$(T_{1,5}): y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} = 3x - \frac{17}{4} \Rightarrow u_2 = \frac{\frac{17}{4}}{3} = \frac{17}{12}$$

3) a) On a de même :

$$(T_{u_n}): y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n) = 2u_n(x - u_n) + u_n^2 - 2 = 2u_n x - u_n^2 - 2$$

b) On a :

$$2u_n x - u_n^2 - 2 \Rightarrow 2u_n x = u_n^2 + 2 \Rightarrow x = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n^2 + 2}{u_n} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = u_{n+1}$$

4) a) On fait une récurrence triviale : On pose $P_n : "u_n > 0"$

Initialisation : $u_0 = 2 > 0 \Rightarrow P_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n . On a donc $u_n > 0$.

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{u_n} > 0 \Rightarrow \frac{2}{u_n} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0 \Rightarrow P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Conclusion : P_0 est vraie et P_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, P_n est toujours vraie donc $u_n > 0$.

b) **Méthode 1** : On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n} \times (u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n) = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{2})^2$$

Méthode 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1} - \sqrt{2}) - \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2u_n} (u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2) = 0$$

c) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } (u_n - \sqrt{2})^2 \geq 0 \Rightarrow u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{2})^2 \geq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \sqrt{2}$$

Et comme $u_0 = 2 \geq \sqrt{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{2}$. Ainsi **(u_n) est minorée par $\sqrt{2}$** .

d) On calcule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$$

Or on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } u_n \geq \sqrt{2} \Rightarrow u_n^2 \geq 2$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$.

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0 \Rightarrow \textbf{ (u_n) est décroissante.}$$

e) (u_n) est décroissante et minorée donc converge vers un réel L , $L \geq \sqrt{2}$. De plus on sait que :

$$\frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) = u_{n+1} \Rightarrow \text{Par passage à la limite : } \frac{1}{2} \left(L + \frac{2}{L} \right) = L \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = -\sqrt{2} \text{ ou } L = \sqrt{2}$$

Or on sait que $L \geq \sqrt{2} \Rightarrow L = \sqrt{2}$.

Ainsi on a :

$$\boxed{\textbf{Lim } u_n = \sqrt{2}}$$

Exercice 2 : Variation de la constante en dimension 2

On cherche à résoudre l'équation différentielle à valeurs dans $\mathbb{R}$ suivante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[: (E): y'' + 4y = \tan(t)$

1) Résoudre l'équation homogène. On ne donnera que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose dans toute la suite :

$$y_1: \left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \cos(2t) \end{array} \right. \text{ et } y_2: \left\{ \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \sin(2t) \end{array} \right.$$

2) a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \left(\mathcal{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)\right)^2$. On cherche à trouver une solution particulière à (E) qui vérifie la relation :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases}$$

Montrer si y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}$$

b) En déduire que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda_2'(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) \tan(t) \end{cases}$$

c) En déduire toutes les solutions de (E).

3) Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1) On sait que :

$$y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

2) a) On sait que :

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \Rightarrow y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \end{cases} \Rightarrow \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$$

De plus si y est solution de (E) on a alors :

$$y'' + 4y = \tan(t)$$

De plus on a :

$$y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' \Rightarrow y'' = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2''$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} y'' + 4y = \tan(t) &\Rightarrow \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + 4(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \tan(t) \\ &\Rightarrow \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' + \lambda_1 (y_1'' + 4y_1) + \lambda_2 (y_2'' + 4y_2) = \tan(t) \end{aligned}$$

De plus on sait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène donc :

$$y_1'' + 4y_1 = 0 = y_2'' + 4y_2$$

On en déduit donc que :

$$\lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t)$$

On en déduit donc que y est solution de (E) et vérifie la relation précédente, on a alors :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \tan(t) \end{cases}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) \cos(2t) + \lambda_2'(t) \sin(2t) = 0 \\ -2\lambda_1'(t) \sin(2t) + 2\lambda_2'(t) \cos(2t) = \tan(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda_1'(t) = -\frac{\sin(2t) \tan(t)}{2} \\ \lambda_2'(t) = \frac{\cos(2t) \tan(t)}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t) \Rightarrow -\frac{\sin(2t) \tan(t)}{2} = -\sin^2(t)$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda'_1(t) = -\frac{\sin(2t) \tan(t)}{2} \\ \lambda'_2(t) = \frac{\cos(2t) \tan(t)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \begin{cases} \lambda'_1(t) = -\sin^2(t) \\ \lambda'_2(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) \tan(t) \end{cases}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \lambda'_1(t) = -\sin^2(t) &= -\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2t) - 1) \\ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \lambda_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right) + c \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\lambda'_2(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) \tan(t) = \frac{1}{2} (2 \cos^2(t) - 1) \tan(t) = \cos(t) \sin(t) - \frac{1}{2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{1}{2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

On en déduit donc que :

$$\exists d \in \mathbb{R}, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \lambda_2(t) = -\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\cos(t)) + d$$

On pose :

$$f: \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t\right) \cos(2t)\right) + \left(-\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\cos(t))\right) \sin(2t) \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, f''(t) + 4f(t) = \tan(t)$$

Donc f est une solution particulière de (E).

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, y(t) \\ = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2t)}{2} - t + A\right) \cos(2t)\right) + \left(-\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\cos(t)) + B\right) \sin(2t) \end{aligned}$$

3) En reprenant les notations de la question précédente on a :

$$y(0) = A = 0$$

De plus on a :

$$y'(0) = \left(-\frac{1}{4} + B\right) 2 = 1 \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} y'' + 4y = \tan(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, y(t) = \left(-\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\cos(t)) + \frac{3}{4}\right) \sin(2t)$$

Problème 1 : Intégrale de Wallis

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Partie A : Convergence de la suite (S_n)

1) Démontrer que la suite (S_n) est croissante.

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

a) Exprimer v_n en fonction de n .

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$$

c) Démontrer que la suite (S_n) converge.

On pose dans toute la suite de ce problème la suite (W_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

Remarque : Ces intégrales s'appellent les intégrales de Wallis.

Partie B : Calculs des trois premiers termes des intégrales de Wallis

1) Calculer W_0, W_1 et W_2 .

2) A l'aide du changement de variable :

$$u = \frac{\pi}{2} - t$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

3) Retrouver le résultat de W_2 sans calculer de primitive.

Partie C : Une formule explicite des intégrales de Wallis

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

b) Retrouvez alors le résultat de W_2 de la partie A grâce à la formule de récurrence précédente.

2) a) Calculer W_3 en linéarisant $\cos^3$.

b) Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide de la formule de récurrence.

3) On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$$

Démontrer que la suite (u_n) est constante.

4) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

b) Déterminer une expression de W_{2n+1} en fonction de n .

Partie D : La limite des intégrales de Wallis1) Démontrer que la suite (W_n) est décroissante.

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$$

c) En déduire la formule de Wallis :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \frac{(2^n(n!))^4}{(2n!)^2} = \pi$$

Partie E : La limite de la suite S_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \text{ et } u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} K_n$$

1) a) A l'aide d'intégrations par parties successives, exprimer W_{2n} à l'aide de K_n et de K_{n-1} .

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} = u_{n-1} - u_n$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} u_n$$

2) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2})$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

d) Conclure.

Problème 1 : Intégrale de Wallis

Le but de ce problème est de démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

Partie A : Convergence de la suite (S_n)

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

On en déduit donc que la suite (S_n) est croissante.

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, k^2 \geq k(k-1)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, \frac{1}{k^2} &\leq \frac{1}{k(k-1)} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 2$$

c) Il suffit de voir que la suite (S_n) est croissante et majorée.

Partie B : Calculs des trois premiers termes des intégrales de Wallis

1)

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \\ W_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

2) On pose :

$$u = \frac{\pi}{2} - t$$

a) On regarde les bornes :

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

b) Calcul de dt

On sait que :

$$u \mapsto \frac{\pi}{2} - u \in \mathcal{C}^\infty \left(\left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

On a donc :

$$\frac{dt}{du} = -1 \Rightarrow dt = -du$$

c) On remplace :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) dt$$

Or on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

3) On a :

$$2W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) + \sin^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$W_2 = \frac{\pi}{4}$$

Partie C : Une formule explicite des intégrales de Wallis

1) a) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1}(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = (n+1)(-\sin(t)) \cos^n(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \underbrace{[\cos^{n+1}(t) \times \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(t)) \cos^n(t) \sin(t) dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^n(t) dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

b) On a d'après la formule de récurrence :

$$W_2 = \frac{1}{2} W_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

2) a) on sait que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2 \cos(3x)} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{3e^{ix} + 3e^{-ix}}{6 \cos(x)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
W_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t) dt = \left[\frac{1}{12} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \\
\Rightarrow W_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

b) On utilise la formule de récurrence :

Pour $n=1$:

$$W_3 = \frac{2}{3} W_1 = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

3) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \Rightarrow u_{n+1} = (n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_{n+1} W_n = u_n$$

Ainsi la suite **(u_n) est constante.**

4) On veut démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 1 : Par récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}"$$

Initialisation :

$$\frac{(0)!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n .

On a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2(n+1)}{2^2(n+1)(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire implique par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} W_{2n-6} \\ &\vdots \text{ On réitère le procédé } n \text{ fois} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} W_0 \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \dots \times 2} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n! \times (n-1) \times \dots \times 1} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n!} \\ &= \frac{2n(2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2^n n! \times 2n \times (2n-2) \times \dots \times 2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

b) C'est la même chose que la question précédente, soit par récurrence ou par itération de la formule de récurrence. Comme on ne nous donne pas de formule à démontrer, nous allons le faire grâce à la méthode 2.

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} W_{2n-5} \\ &\vdots \text{ On réitère le procédé } n \text{ fois} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} W_1 \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_1 = 1$$

De plus on a :

$$\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} = \frac{2^n n!}{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3}$$

$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Partie D : La limite des intégrales de Wallis

1) On sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \, dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq W_{n+1} \leq W_n$$

2) a) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$$

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{W_{2n-1}}{W_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}$$

De plus on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} = 1$$

c) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \frac{W_{2n}}{W_{2n+1}} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \\ &= (2n+1) \frac{\pi}{2} \times \frac{((2n)!)^2}{(2^n(n!))^4} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1) \frac{\pi}{2} \times \frac{((2n)!)^2}{(2^n(n!))^4} &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{((2n)!)^2}{(2^n(n!))^4} &= \frac{1}{\pi} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \times \frac{(2^n(n!))^4}{(2n!)^2} &= \pi \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{(2^n(n!))^4}{(2n!)^2} &= \pi \end{aligned}$$

Partie E : La limite de la suite S_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \text{ et } u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} K_n$$

1) a) On sait que :

$$W_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \cos^{2n}(t) dt = \underbrace{[t \times \cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times \sin(t) \times \cos^{2n}(t) dt = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times \sin(t) \times \cos^{2n-1}(t) dt$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times \sin(t) \times \cos^{2n-1}(t) dt \\ &= \underbrace{\left[\frac{t^2}{2} \times \sin(t) \times \cos^{2n-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times (\cos(t) \times \cos^{2n-1}(t) - (2n-1) \sin^2(t) \cos^{2n-2}(t)) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt + \frac{2n-1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (1 - \cos^2(t)) \cos^{2n-2}(t) dt \\ &= -\frac{1}{2} K_n + \frac{2n-1}{2} K_{n-1} - \frac{2n-1}{2} K_n \\ &= -n K_n + \frac{2n-1}{2} K_{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n} = -2n^2 K_n + n(2n-1) K_{n-1}$$

b) De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, -2n^2 K_n + n(2n-1)K_{n-1} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow -2n^2 K_n \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} + n(2n-1) \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} K_{n-1} &= \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow -2n^2 u_n + \frac{n(2n-1)4n^2}{(2n)(2n-1)} \times \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} K_{n-1} &= \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow 2n^2(u_{n-1} - u_n) &= \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\pi}{4n^2} &= u_{n-1} - u_n
\end{aligned}$$

c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{4}{\pi} (u_{k-1} - u_k) = \frac{4}{\pi} \times (u_0 - u_n)$$

Or on sait que :

$$u_0 = K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{4}{\pi} \times \left(\frac{\pi^3}{24} - u_n \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} u_n$$

2) a) Montrons que (cf ex B1 du TD 4) :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right], \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x)$$

On pose :

$$f : \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{\pi} x - \sin(x) \end{cases}$$

On sait que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ et :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right], f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos(x)$$

De plus on sait que :

- $\cos$ est continue
- $\cos$ est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$
- $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc d'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), pour tout $y \in [0; 1]$, il existe un unique $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ telle que $\cos(x) = y$.

Or on sait que :

$$0 < \frac{2}{\pi} < 1$$

On en déduit donc qu'il existe un unique $\alpha \in]0; 1[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{2}{\pi}$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2}{\pi} - \cos(x)$	-	0	+
f	0	$\searrow$	$\nearrow$ 0

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x - \sin(x) \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t) \\ \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2(t) \text{ car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2(t) \cos^{2n}(t) dt \text{ (par croissance de l'intégrale)} \\ \Rightarrow 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{2n}(t) dt \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2}) \end{aligned}$$

c) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2})$$

On sait de plus que :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} K_n \leq \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \right) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right) \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2n+1}{2(n+1)} \right) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{2n+1}{2(n+1)} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2n+1}{2(n+1)} \right) = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_n u_n = 0$$

d) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{4}{\pi} u_n$$

D'après la question précédente on en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$