Programme de Colle n°15
(22 au 26 janvier 2024)

Limite de fonctions

- Définition de la limite avec les quantificateurs :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, f(x) > A$$
$$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |x-c| \leq \delta \implies |f(x)-\ell| < \epsilon$$
- Définition de la limite par les voisinages :
$$\forall\, \mathcal{V}_\ell, \exists\, \mathcal{V}_a, \forall\, x\ \mathcal{V}_a \cap I, f(x) \in \mathcal{V}_\ell$$
- Unicité de la limite
- Caractérisation séquentielle de la limite :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} u_n = a\,,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right)$$
- Opérations sur les limites (Inégalités, majoration, théorème des gendarmes

Continuité

- Définition de la continuité en un point
- Prolongement par continuité
- Définition séquentielle de la continuité
$$f \text{ est continue en a } \Leftrightarrow \left(\forall\, (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, u_n \to a \Rightarrow f(u_n) \to f(a)\right)$$

Calcul matriciel

- Opération sur les matrices (somme, multiplication par un scalaire, produit)

Remarque : Nous n'avons pas fait beaucoup d'exercices sur les produits matriciels. On s'attachera à bien comprendre le produit matriciel, y compris pour des matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

Questions de cours

- Caractérisation séquentielle de la limite
- Théorème des valeurs intermédiaires (grâce à la construction de deux suites adjacentes par dichotomie).
- Montrer que le produit matriciel n'est pas nécessairement commutatif

Exercices types

- Convergence de suites implicites
- Soit $f \in \mathcal{C}([0;1];[0;1])$. Montrer que f admet au moins un point fixe.
- On dit que $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si est seulement si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \geq 0$$
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

Soit A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall \lambda \in [0;1], \lambda A + (1-\lambda)B$ et AB sont stochastiques