DM n°5
PCSI 2023-2024
A rendre pour le mardi 30 janvier

Exercice 1

Dans cet exercice on cherche toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tel que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$
On pose :
$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})\ tq\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)\}$$
1) Soit $f \in E$. Montrer que $f(0) = 0$.
2) Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$$
3) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = nf(1)$$
4) En déduire que :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}, b \neq 0, f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} f(1)$$
5) Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, déterminer tous les éléments de E.

Exercice 2 : Un couple de suite

On considère les suites définie par :
$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \begin{cases} (\mathrm{u}_0, \mathrm{v}_0) = (0,1) \\ \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} = 6\mathrm{u}_\mathrm{n} - \mathrm{v}_\mathrm{n} \\ \mathrm{v}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{u}_\mathrm{n} + 4\mathrm{v}_\mathrm{n} \end{cases}$$
Partie A : Avec une matrice
1) Déterminer la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} \mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} \\ \mathrm{v}_{\mathrm{n}+1} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \begin{pmatrix} \mathrm{u}_\mathrm{n} \\ \mathrm{v}_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$
2) a) Déterminer J telle que :
$$\mathrm{A} = 5\mathrm{I}_2 + \mathrm{J}$$
b) Calculer J^2.
c) En déduire A^n pour tout entier naturel n.
2) En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.
Partie B : Avec une suite linéaire récurrente d'ordre 2
1) Montrer que :
$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{u}_{\mathrm{n}+2} - 10\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} + 25\mathrm{u}_\mathrm{n} = 0$$
2) En déduire u_n en fonction de n.
3) En déduire v_n en fonction de n.

Problème 2 : Mines-sup 2007

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall t > 0, f(t) = e^{-\frac{1}{t}} \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Partie A : Etude de f et g.

1) a) Montrer que $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[)$.

b) Démontrer que :

$$\forall t > 0, tf'(t) = g(t)$$

2) a) Démontrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$. Nous le noterons dans toute la suite g.

b) Démontrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

3) Soit H la primitive de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ s'annulant en 1. Calculer H.

Partie B : Une suite implicite

1) Soit $n \geq 3$. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$ d'inconnue $t > 0$.

2) a) Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $]0; 1[$ que l'on notera α_n.
(On montrerait identiquement que (E_n) admet une unique solution sur $]1; +\infty[$. On ne demande pas de le faire !). On note β_n cette solution.

b) Montrer que (α_n) et (β_n) sont monotones.

c) Et-il possible que l'une des deux suites convergent vers $\ell > 0$? En déduire leur limite.

Partie C : Etude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de $(E): x^2y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Nous allons, sans aucun calcul explicite de y, déterminer la suite des $y^{(n)}(0) = u_n$ à partir de (E).

1) Que vaut $u_0 = y(0)$?

2) a) En dérivant (E), calculer $u(1) = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

b) Peut-on avoir y de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$? (Avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

3) Soit n un entier naturel.

a) On suppose ici que $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que :

$$\forall x \geq 0, x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^n(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$

b) En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

c) Donner une formule explicite de u_n en utilisant les factorielles, valable pour $n \geq 2$.