Correction DS n°4

Exercice 1 : Un système linéaire

Dans cet exercice, on souhaite équilibrer l'équation de réaction suivante :

$$C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

C'est-à-dire trouver les coefficients $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que :

$$aC_2H_6 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

1) Montrer qu'équilibrer cette l'équation de réaction revient à résoudre le système suivant :

$$(E): \begin{cases} 2a = c \\ 3a = d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

2) Déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

3) En déduire une combinaison $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que :

$$aC_2H_6 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

1) On doit avoir autant d'atomes de carbone à gauche qu'à droite de la réaction. On a donc :

$$2a = c$$

De même pour l'hydrogène et l'oxygène :

$$6a = 2d \text{ et } 2b = 2c + d$$

On obtient alors :

$$\boldsymbol{(E): \begin{cases} 2a = c \\ 3a = d \\ 2b = 2c + d \end{cases}}$$

2) On a trois équations quatre inconnues. Comme le système est homogène, il est compatible. De plus on a :

$$(E): \begin{cases} 2a = c \\ 3a = d \\ 2b = 2c + d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{2} \\ d = \dfrac{3}{2}c \\ b = \dfrac{7}{4}c \end{cases}$$

On en déduit donc que (a, b, c, d) est solution du système si et seulement si :

$$\boxed{\boldsymbol{(a, b, c, d) \in \left\{\left(\frac{c}{2}\,; \frac{7}{4}c; c; \frac{3}{2}c\right); c \in \mathbb{R}\right\}}}$$

3) En posant $c = 4$ on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O}}$$

Exercice 2 : Une suite implicite

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul et f_n est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^{2n} - x^n - x - 3$$

Partie A : Géneralités

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = 0$.

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles -1 est solution de $f_n(x) = 0$.

3) Démontrer qu'il existe une unique valeur $\alpha_n > 0$ que l'on précisera en laquelle $f_n''(\alpha_n) = 0$.

4) En déduire qu'il existe une unique valeur $\beta_n > 0$ telle que $f_n'(\beta_n) = 0$.

5) Déterminer les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution strictement positive. On pose cette solution x_n pour tout le reste du problème.

Partie B : Convergence de x_n

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, 1 < x_n < 2$$

2) Démontrer que :

$$f_{n+1}(x_n) > 0$$

3) Démontrer que (x_n) converge vers $\ell \in [1; 2[$.

4) Soit $a > 1$. Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a)$$

5) En déduire que :

$$\lim x_n = 1$$

Partie A : Généralités

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = x^2 - x - x - 3 = x^2 - 2x - 3$$

Ainsi on a :

$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$$

2) On a :

$$f_n(-1) = (-1)^{2n} - (-1)^n + 1 - 3 = -1 - (-1)^n$$

Ainsi on a :

$$f_n(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 = (-1)^n \Leftrightarrow n \text{ est impaire.}$$

3) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathbb{R}[X] \Longrightarrow f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ et :}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = 2nx^{2n-1} - nx^{n-1} - 1$$
$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_n''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} - n(n-1)x^{n-2}$$
$$= nx^{n-2}\big((4n-2)x^n - n + 1\big)$$

On résout sur $]0; +\infty[$, $f_n''(x) = 0$. On a :

$$nx^{n-2}\big((4n-2)x^n - n + 1\big) = 0 \Longrightarrow (4n-2)x^n - n + 1 = 0 \text{ (car } x > 0)$$
$$\Longrightarrow x^n = \frac{n-1}{4n-2}$$

Or la fonction $x \mapsto x^n$ est bijective sur $]0; +\infty[$. On a donc :

$$x^n = \frac{n-1}{4n-2} \Longrightarrow x = \left(\frac{n-1}{4n-2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

On a donc :

$$\alpha_n = \left(\frac{n-1}{4n-2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

4) On a le tableau de variations suivant :

x	0		α_n		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
f_n'	-1	$\searrow$	$f_n'(\alpha_n)$	$\nearrow$	

Or on a :

$$\lim_{x\to+\infty} 2nx^{2n-1} - nx^{n-1} - 1 = \lim_{x\to+\infty} nx^{2n-1}\left(2 - \frac{1}{x^n} - \frac{1}{nx^{2n-1}}\right) = +\infty$$

On a donc :

$$\forall x \in [0; \alpha_n], f_n'(x) < 0$$

Sur $[\alpha_n; +\infty[$, on a :

- f'_n est continue.
- f'_n est strictement croissante.
- f'_n change de signe.

Donc d'après le TVI, il existe un unique $\beta_n \in [\alpha_n; +\infty[$ tel que $f_n'(\beta_n) = 0$.
Ainsi on en déduit que :

$$\exists!\, \beta_n > 0, f_n'(\beta_n) = 0$$

5) On a :

$$f_n(0) = -3 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$$

On a de plus le tableau suivant :

x	0		α_n		β_n		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
f'_n	-1	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'_n(x)$			$-$		0	$+$	
f_n	-3		$\searrow$			$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc de la même façon que précédemment à la question 4 :

$$\exists!\, x_n > 0, f_n(x_n) = 0$$

Partie B : Convergence de x_n

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, f_n(1) = -4$$

On a de plus :

$$f_n(2) = 4^n - 2^n - 5 = 2^n\left(2^n - 1 - \frac{5}{2^n}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq 2, \frac{5}{2^n} \leq \frac{5}{4} \Longrightarrow 2^n - 1 - \frac{5}{2^n} \geq 2^n - \frac{9}{4} > 0 \text{ si } n \geq 2$$

Donc : $\forall n \geq 2, f_n(2) > 0$

On en déduit donc que f_n change de signe sur $[1; 2]$ donc $1 < x_n < 2$.

2) On a :

$$f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{2n+2} - {x_n}^{n+1} - x_n - 3$$

Or on sait que :

$$f_n(x_n) = {x_n}^{2n} - {x_n}^{n} - x_n - 3 = 0 \Longrightarrow x_n + 3 = {x_n}^{2n} - {x_n}^{n}$$

$$\Longrightarrow f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{2n+2} - {x_n}^{n+1} - x_n - 3 = {x_n}^{2n+2} - {x_n}^{n+1} - ({x_n}^{2n} - {x_n}^{n})$$

$$= x_n^{2n}(x_n^2 - 1) - x_n^n(x_n - 1) = (x_n - 1)x_n^n(x_n^n(x_n + 1) - 1)$$

Or on sait que :

$$\forall n \geq 2, 1 < x_n < 2$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 2, (x_n - 1)x_n^n > 0 \text{ et } x_n + 1 > 2 \Longrightarrow x_n^n(x_n + 1) > 2 \Longrightarrow x_n^n(x_n + 1) - 1 > 1 > 0$$

On a donc :

$$\forall n \geq 2, f_{n+1}(x_n) > 0$$

3) On sait que :

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \text{ et } f_{n+1}(x_n) > 0$$

De plus f_{n+1} est strictement croissante sur $]\beta_{n+1}; +\infty[$ avec $\beta_{n+1} < x_{n+1}$

On en déduit donc que :

$$x_n > x_{n+1}$$

Ainsi la suite (x_n) est strictement décroissante minorée par 1 donc elle converge vers $\ell \in [1; 2[$.

4) On sait que :

$$\forall a > 1, \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} a^{2n}\left(1 - \frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{a^{2n-1}} - \frac{3}{a^{2n}}\right) = +\infty \text{ car } a > 1$$

5) On sait que :

$$\lim_{n} x_n = \ell \in [1; 2[$$

Si $\ell > 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\ell) = +\infty$$

On sait de plus que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 < \ell < x_n \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_n(\ell) < f_n(x_n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_n(\ell) < 0$$

Impossible.

Donc $\ell = 1$.

Exercice 3 : Irrationalité de $\exp(1) = e^1 = e$

Le but de cet exercice est de prouver que e est irrationnel.

Partie A : Une nouvelle expression de e

Dans cette partie on veut montrer que :

$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

1) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e = u_n + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

(On pourra faire une IPP).

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |e - u_n| \leq \frac{e}{n!}$$

3) En déduire que (u_n) converge vers e.

Partie B : $e \notin \mathbb{Q}$

On pose la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

1) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante à partir de $n \geq 1$.
2) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! \times u_n < n! \times e < 1 + n! \times u_n$$

4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! \times e \notin \mathbb{N}$$

5) En raisonnant par l'absurde, démontrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Partie A :

1) On pose :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{\mathcal{P}_n} : "\ \boldsymbol{e = u_n + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt}\ "$$

<u>Initialisation : $n = 0$</u>

On a :

$$u_0 + \frac{1}{0!}\int_0^1 (1-t)^0 e^t dt = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} + \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{0!} + [e^t]_0^1 = 1 + (e-1) = e$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier fixé. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie :

$$e = u_n + \frac{1}{n!}\int_0^1 \underbrace{(1-t)^n}_{=u'(t)} \underbrace{e^t}_{=v(t)} dt$$

On a alors en effectuant une IPP :

$$e = u_n + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \times \left(\underbrace{\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} e^t \right]_0^1}_{=\frac{1}{n+1}} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} e^t dt \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion</u> : On conclut d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{e = u_n + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt}}$$

2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, e - u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

Or on sait que :

$$\forall t \in [0;1], 0 \leq 1 - t \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], 0 \leq (1-t)^n \leq 1\ (car\ x \mapsto x^n\ est\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^+)$$

On en déduit par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^1 0 \times dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 e^t dt \Longrightarrow \boxed{\mathbf{0 \leq e - u_n \leq \frac{e-1}{n!}}}$$

3) On a :

$$\lim_n \frac{e-1}{n!} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\mathbf{\lim_n u_n = e}$$

Remarque : On note :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Partie B : $e \notin \mathbb{Q}$

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\right) = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!}$$

$$= -\frac{n-1}{(n+1)!}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\mathbf{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, v_{n+1} - v_n \leq 0}}$$

Donc la suite (v_n) est décroissante à partir de $n = 1$.

2) On a :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

Ainsi (u_n) est croissante.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, v_n - u_n = \frac{1}{n!} \to 0$$

On en déduit donc que :

- **$(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante**
- **$(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante**
- **$v_n - u_n \to 0$**

On en déduit donc que **les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.**

3) D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} < v_n$$

On sait de plus que $u_n \to e$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < e < v_n \Longrightarrow n! \times u_n < n! \times e < n! \times v_n$$

Or on a $n! \times v_n = 1 + n!\, u_n$

$$\boxed{\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, n! \times u_n < n! \times e < 1 + n!\, u_n}$$

4) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \times u_n = n! \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\prod_{l=k+1}^{n} l\right)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \Longrightarrow n! \times u_n \in \mathbb{N}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{n! \times u_n}_{\in \mathbb{N}} < n! \times e < 1 + n!\, u_n$$

On en déduit que **$n! \times e$ est strictement compris entre deux entiers consécutifs**. Donc $n! \times e$ n'est jamais un entier.

5) On suppose que $e \in \mathbb{Q}$. Alors :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2 \ tq \ e = \frac{p}{q}$$

On en déduit donc que :

$$q \times e = p \in \mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow q! \times e = q! \times e \in \mathbb{N}$$

Cela est impossible d'après la question 4).

On en déduit donc que **$e \notin \mathbb{Q}$**.

Problème 1 : Une équation différentielle

On s'intéresse ici à la résolution sur $\mathrm{I} =]0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{2}{1+x^2} y = (1+x^2)\ln(x)$$

On note (E_0) l'équation homogène associée.

Partie A : Calculs préliminaires

1) Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

2) En déduire une primitive de

$$f: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)} \end{cases}$$

3) On pose :

$$G: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \dfrac{x^3}{9} \end{cases}$$

Montrer que G est une primitive sur I de la fonction g définie par :

$$g: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1-x^2)\ln(x) \end{cases}$$

4) Déterminer une primitive de :

$$f: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln(x) \end{cases}$$

Partie B : Résolution de l'équation sans second membre

1) Montrer que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E_0)

2) Soit $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables. On pose :

$$z: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{y(x)}{x} \end{cases}$$

Montrer que :

$$y \text{ solution de } (E_0) \Leftrightarrow z' \text{est solution sur I de } (E') : xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

3) Résoudre l'équation différentielle suivante sur I :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

4) Donner l'ensemble des solutions de (E_0).

Partie C : Résolution finale

1) On cherche à présent une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont deux fonctions définie sur I et deux fois dérivables sur I vérifiant :

$$\lambda'(x) \times x + \mu'(x) \times (x^2-1) = 0$$

a) Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.

b) Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si $(\forall x \in I, \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln(x))$.

c) Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes puis en déduire une solution particulière de (E).

2) Donner l'ensemble des solutions de (E).

On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x)$$

On note (E_0) l'équation homogène associée.

Partie A : Calculs préliminaires

1) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{x^2+1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

2) On a :

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

3) On pose :

$$G : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9} \end{cases}$$

On sait que G est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, G'(x) = (1-x^2)\ln(x) + 1 - \frac{x^2}{3} - 1 + \frac{x^2}{3} = (1-x^2)\ln(x) = g(x)$$

Donc G est une primitive de g sur I.

4) On effectue une intégration par partie en posant :

$$\begin{cases} u'^{(x)} = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{x^2}{2} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right] - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

Partie B : Résolution de l'équation sans second membre

1) On pose : $y_1 : x \mapsto x$ avec $x > 0$. $y_1 \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et :

$$\forall x > 0, y_1'(x) = 1 \text{ et } y_1''(x) = 0$$

On a donc :

$$y_1'' - \frac{2x}{1+x^2}y_1' + \frac{2}{1+x^2}y_1 = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

Donc $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E_0)

2) Soit $y : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables. On pose :

$$z : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{y(x)}{x} \end{cases}$$

On a donc :

$$y(x) = xz(x)$$

Comme y est deux fois dérivable, z est deux fois dérivables et :

$$\forall x > 0, y'(x) = z(x) + xz'(x) \text{ et } y''(x) = z'(x) + z'(x) + xz''(x) = 2z'(x) + xz''(x)$$

On a donc :

De plus on sait que y est solution de (E_0) si et seulement si :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2z'(x) + xz''(x) - \frac{2x}{1+x^2}\big(z(x) + xz'(x)\big) + \frac{2}{1+x^2}(xz(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow xz''(x) + \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{1+x^2}z'(x) + \frac{1}{1+x^2}(-2x + 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow xz''(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow z' \text{ est solution de } xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

3) On sait que :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0 \Leftrightarrow u' + \frac{2}{x(1+x^2)}u = 0 \text{ car } x > 0$$

On sait que :

$$\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx = 2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

On a donc :

$$u \text{ solution de } u' + \frac{2}{x(1+x^2)}u = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, u(x) = \lambda e^{-\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx} = \lambda e^{-\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} = \frac{\lambda}{x^2}(1+x^2)$$

4) On sait que y est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de : $xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$

Or on a vu à la question 3) que :

$$u \text{ solution de } u' + \frac{2}{x(1+x^2)}u = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, u(x) = \frac{\lambda}{x^2}(1+x^2) = \frac{\lambda}{x^2} + \lambda$$

On a donc :

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x^2} + \lambda$$

On en déduit donc que :

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, z(x) = -\lambda\frac{1}{x} + \lambda x + \mu$$

On en déduit donc que y est solution de (E_0) si et seulement si :

$$\boxed{\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, y(x) = \lambda(x^2 - 1) + \mu x}$$

Partie C : Résolution finale

1) On cherche à présent une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2 - 1)$ où λ et μ sont deux fonctions définie sur I et deux fois dérivables sur I vérifiant :

$$\lambda'(x)\ \times x + \mu'(x)\ \times (x^2 - 1) = 0$$

a) Comme λ et μ sont deux fonctions définie sur I et deux fois dérivables sur I, y_p est une fonction deux fois dérivables sur I et :

$$\forall x > 0, y_p'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x) \times (x^2 - 1) + 2x\mu(x)$$

Or on sait que :

$$\lambda'(x)\ \times x + \mu'(x)\ \times (x^2 - 1) = 0$$

On en déduit que :

$$\forall x > 0, y_p'(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)$$

On a donc :

$$\forall x > 0, y_p''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x)$$

b) On a y_p est solution de (E) si et seulement si :

$$y_p'' - \frac{2x}{1+x^2}y_p' + \frac{2}{1+x^2}y_p = (1+x^2)\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}\big(\lambda(x) + 2x\mu(x)\big) + \frac{2}{1+x^2}\big(\lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)\big) = (1+x^2)\ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x)$$

2) On résout le système :

$$\begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) \\ \lambda'(x) \times x + \mu'^{(x)} \times (x^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda'(x)x + 2x^2\mu'(x) = x(1+x^2)\ln(x) \\ \lambda'(x) \times x + \mu'(x) \times (x^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u'(x) = x\ln(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + c_1, \text{où } c_1 \in \mathbb{R}$$

On a donc :

$$\lambda'(x) = (1+x^2)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1-x^2)\ln(x)$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \frac{x^3}{9} + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

On a donc :

y_p est solution particulière de (E) avec :

$$\forall x > 0, y_p(x) = \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 1)$$

3) On en déduit donc que :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda(x^2-1) + \mu x + \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln(x) - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)(x^2-1)}$$