DS 4 - PCSI 2023-2024
Le 20 janvier 2024

On attachera la plus grande importance à la ***clarté*** *et à la* ***précision*** *de la rédaction, ainsi qu'à la* ***propreté*** *de la présentation, et on veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on pourra le signaler sur sa copie et poursuivre la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.*

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent donc être traités dans ***n'importe quel ordre****. Au cours d'un exercice, lorsque l'on ne peut pas répondre à une question, il est* ***vivement recommandé*** *de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.*

La calculatrice est interdite

Exercice 1 : Un système linéaire

Dans cet exercice, on souhaite équilibrer l'équation de réaction suivante :

$$C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$$

C'est-à-dire trouver les coefficients $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que :

$$aC_2H_6 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

1) Montrer qu'équilibrer l'équation de réaction revient à résoudre le système suivant :

$$(E): \begin{cases} 2a = c \\ 3a = d \\ 2b = 2c + d \end{cases}$$

2) Déterminer l'ensemble des solutions de ce système.

3) En déduire une combinaison $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que :

$$aC_2H_6 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

Exercice 2 : Une suite implicite

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul et f_n est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^{2n} - x^n - x - 3$$

Partie A : Géneralités

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = 0$.

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles -1 est solution de $f_n(x) = 0$.

3) Démontrer qu'il existe une unique valeur $\alpha_n > 0$ que l'on précisera en laquelle $f_n''(\alpha_n) = 0$.

4) En déduire qu'il existe une unique valeur $\beta_n > 0$ telle que $f_n'(\beta_n) = 0$.

5) Déterminer les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution strictement positive. On pose cette solution x_n pour tout le reste du problème.

Partie B : Convergence de x_n

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, 1 < x_n < 2$$

2) Démontrer que :

$$f_{n+1}(x_n) > 0$$

3) Démontrer que (x_n) converge vers $\ell \in [1; 2[$.

4) Soit $a > 1$. Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(a)$$

5) En déduire que :

$$\lim x_n = 1$$

Exercice 2 : Irrationalité de $\exp(1) = e^1 = e$

Le but de cet exercice est de prouver que e est irrationnel.

Partie A : Une nouvelle expression de *e*

Dans cette partie on veut montrer que :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On pose la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

1) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, e = u_n + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

(On pourra faire une IPP).

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq e - u_n \leq \frac{e-1}{n!}$$

3) En déduire que (u_n) converge vers e.

Partie B : $e \notin \mathbb{Q}$

On pose la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

1) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante à partir de $n \geq 1$.

2) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \times u_n < n! \times e < 1 + n! \times u_n$$

4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! \times e \notin \mathbb{N}$$

5) En raisonnant par l'absurde, démontrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Problème 1 : Une équation différentielle

On s'intéresse ici à la résolution sur $\mathrm{I} =]0; +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln(x)$$

On note (E_0) l'équation homogène associée.

Partie A : Calculs préliminaires

1) Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

2) En déduire une primitive de

$$f: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)} \end{cases}$$

3) On pose :

$$G: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(x - \dfrac{x^3}{3}\right)\ln(x) - x + \dfrac{x^3}{9} \end{cases}$$

Montrer que G est une primitive sur I de la fonction g définie par :

$$g: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (1-x^2)\ln(x) \end{cases}$$

4) Déterminer une primitive de :

$$f: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln(x) \end{cases}$$

Partie B : Résolution de l'équation sans second membre

1) Montrer que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E_0)

2) Soit $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables. On pose :

$$z: \begin{cases} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{y(x)}{x} \end{cases}$$

Montrer que :

$$y \text{ solution de } (E_0) \Leftrightarrow z' \text{est solution sur I de } (E') : xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

3) Résoudre l'équation différentielle suivante sur I :

$$xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

4) Donner l'ensemble des solutions de (E_0).

Partie C : Résolution finale

1) On cherche à présent une solution particulière de (E) sous la forme $y_p : x \mapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2 - 1)$ où λ et μ sont deux fonctions définie sur I et deux fois dérivables sur I vérifiant :

$$\lambda'(x) \times x + \mu'(x) \times (x^2 - 1) = 0$$

a) Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.

b) Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si $(\forall x \in I, \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2 + 1)\ln(x))$.

c) Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes puis en déduire une solution particulière de (E).

2) Donner l'ensemble des solutions de (E).