Programme de Colle n°16
(5 au 9 février 2024)

Calcul matriciel

- Opération sur les matrices (somme, multiplication par un scalaire, produit)
- Calcul de la puissance d'une matrice carrée
- Les matrices inversibles (à l'aide du pivot de Gauss ou la résolution d'un système linéaire ou avec un polynôme en A).
- La transposée

Dérivabilité

- Nombre dérivé comme taux de variation
- Développement limité d'ordre 1 :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement s'il existe et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \text{ avec } \epsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 0$$

- Toute fonction dérivable est continue
- Opérations sur les fonctions, dérivées d'une réciproque, dérivée n-ième et formule de Leibniz
- Théorème de Rolle, des accroissements finis.
- Fonctions lipchitziennes, contractantes, applications aux suites numériques $u_{n+1} = f(u_n)$

Questions de cours

- **TAF (Théorème des accroissements finis)** : Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a\,;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- Décomposition des matrices carrées par somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists!\,(S,A) \in S_n(\mathbb{K}) \times A_n(\mathbb{K}) \text{ tels que } M = S + A$$
- Formule de dérivation pour le produit, la somme et le quotient

Exercices du type

_ Montrer que :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \Longrightarrow A = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$
Calculer A^n pour tout entier naturel n.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.
a) Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$
b) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Calculer la dérivée n-ième de :
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

_ Etudier la convergence de la suite :
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \end{cases}$$