

## Correction DM n°5

## Exercice 1

Dans cet exercice on cherche toutes les fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)\}$$

1) Soit  $f \in E$ . Montrer que  $f(0) = 0$ .

2) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$$

3) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = nf(1)$$

4) En déduire que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}, b \neq 0, f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1)$$

5) Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , déterminer tous les éléments de  $E$ .

1) On a :

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = "f(n) = nf(1)"$$

Initialisation :

D'après la question , on sait que  $f(0) = 0$ . Or  $0 \times f(0) = 0$ , on a donc  $\mathcal{P}_0$  vraie.

Hérédité : Soit un entier naturel fixé. On suppose que est vraie, donc  $f(n) = nf(1)$

On en déduit donc que :

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n + 1)f(1)$$

Donc est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$$

3) Soit  $n \in \mathbb{Z}^-$ . On a alors  $-n \in \mathbb{N}$  :

Ainsi :

$$0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) = f(n) - nf(1) \Rightarrow f(n) = nf(1)$$

4) Soit . On veut montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, b \neq 0, f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1)$$

On sait que  $f(a) = af(1)$  donc :

$$f(a) = f\left(\frac{a}{b} \times b\right) = af(1)$$

1<sup>er</sup> cas :  $b \in \mathbb{N}^*$

De plus on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b} \times b\right) &= f\left(\frac{a}{b} \times (b - 1) + \frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b} \times (b - 1)\right) + f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{a}{b} \times (b - 2) + \frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{a}{b}\right) \\ &= f\left(\frac{a}{b} \times (b - 2)\right) + 2f\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

En réitérant le procédé (ou alors par récurrence), on démontre que :

$$\forall b \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{a}{b} \times b\right) = bf\left(\frac{a}{b}\right)$$

De plus on sait que :

$$f(a) = af(1) = bf\left(\frac{a}{b}\right)$$

On en déduit donc que :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1)$$

2<sup>ème</sup> cas :  $b \in \mathbb{Z}^-$

On a alors :

$$f(0) = f\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{-b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{a}{-b}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b}f(1) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1)$$

5) Soit . On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \rightarrow x$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n f(1) \text{ et}$$

Comme  $f$  est continue on a :

$$\lim_n f(x_n) = f\left(\lim_n x_n\right) = f(x)$$

De plus :  $x_n f(1) \rightarrow x f(1)$

On en déduit donc que :

$$f(x) = x f(1)$$

Donc les seules fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient sont les fonctions dites linéaires !

### Exercice 2 : Un couple de suite

On considère les suites définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} (u_0, v_0) = (0, 1) \\ u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

#### Partie A : Avec une matrice

1) Déterminer la matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

2) a) Déterminer  $J$  telle que :

$$A = 5I_2 + J$$

b) Calculer  $J^2$ .

c) En déduire  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

2) En déduire une expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

#### Partie B : Avec une suite linéaire récurrente d'ordre 2

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 10u_{n+1} + 25u_n = 0$$

2) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3) En déduire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

#### Partie A :

1) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2) a) On a :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) On a :

$$J^2 = \mathbf{0}_2$$

c)  $5I_2$  et  $J$  commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton pour les matrices !

$$A^n = (5I_2 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (5I_2)^{n-k} J^k = 5^n I_2 + 5^{n-1} n J = \begin{pmatrix} 5^{n-1}(n+5) & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^{n-1}(5-n) \end{pmatrix}$$

2) On a :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$X_n = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n5^{n-1} \\ 5^{n-1}(5-n) \end{pmatrix}$$

**Remarque :** On peut démontrer par une récurrence immédiate que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

**Partie B :**

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 6u_n - v_n \Rightarrow u_{n+2} = 6u_{n+1} - v_{n+1} = 6u_{n+1} - (u_n + 4v_n) = 6u_{n+1} - u_n - 4v_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n - 4(6u_n - u_{n+1}) = 10u_{n+1} - 25u_n$$

2) On résout :  $r^2 - 10r + 25 = 0 \Leftrightarrow r = 5$

On a :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)5^n$$

De plus on sait que :

$$u_0 = 0 = B \text{ et } u_1 = 5A = -1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n5^{n-1}$$

3) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6u_n - u_{n+1} = 5^{n-1}(5 - n)$$

**Problème 2 : Mines-sup 2007**

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall t > 0, f(t) = e^{-\frac{1}{t}} \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

**Partie A : Etude de f et g.**

- 1) a) Montrer que  $(f, g) \in \mathcal{C}^\infty([0; +\infty[)$ .  
b) Démontrer que :

$$\forall t > 0, t f'(t) = g(t)$$

- 2) a) Démontrer que g est prolongeable par continuité sur  $\mathbb{R}^+$ . Nous le noterons dans toute la suite g.  
b) Démontrer que g est dérivable en 0 et déterminer  $g'(0)$ .  
3) Soit H la primitive de  $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$  s'annulant en 1. Calculer H.

**Partie B : Une suite implicite**

Soit  $n \geq 3$ . On introduit l'équation  $(E_n) : f(t) = \frac{t}{n}$  d'inconnue  $t > 0$ .

- 1) a) Montrer que  $(E_n)$  admet une unique solution dans  $]0; 1[$  que l'on notera  $\alpha_n$ .  
(On montrerait identiquement que  $(E_n)$  admet une unique solution sur  $]1; +\infty[$ . On ne demande pas de le faire !).  
On note  $\beta_n$  cette solution.  
b) Montrer que  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont monotones.  
c) Et-il possible que l'une des deux suites convergent vers  $\ell > 0$  ? En déduire leur limite.

**Partie C : Etude qualitative d'une équation différentielle**

On considère maintenant une application y solution de  $(E) : x^2 y' + y = x^2$  sur  $\mathbb{R}^+$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous allons, sans aucun calcul explicite de y, déterminer la suite des  $y^{(n)}(0) = u_n$  à partir de (E).

- 1) Que vaut  $u_0 = y(0)$  ?  
2) a) En dérivant (E), calculer  $u(1) = y'(0)$  et  $u_2 = y''(0)$ .  
b) Peut-on avoir y de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  ? (Avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ).  
3) Soit n un entier naturel.  
a) On suppose ici que  $n \geq 3$ . Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que :  
$$\forall x \geq 0, x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$
  
b) En déduire une relation de récurrence entre  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .  
c) Donner une formule explicite de  $u_n$  en utilisant les factorielles, valable pour  $n \geq 2$ .

**Partie A :**

1) a) La fonction  $t \mapsto e^t$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{**}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{**}$ .

Donc la fonction f est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{**}$  par COMPOSEE.

La fonction g est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{**}$  en tant que QUOTIENT de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{**}$  dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^{**}$ .

**Les fonctions f et g sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{**}$ .**

b) De plus :

$$\forall t > 0, f'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \Rightarrow t f'(t) = g(t)$$

2) a) D'après le **théorème des croissances comparées**, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{-X}}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

On peut donc prolonger  $g$  par continuité en 0 en posant  $g(0) = 0$ .

b) On calcule :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0 \text{ (par croissance comparée)}$$

Donc le prolongement de  $g$  est dérivable et  $g'(0) = 0$ .

3) On a :

$$H(x) = \int_1^x g\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_1^x t e^{-t} dt = [-t e^{-t}]_1^x + \int_1^x e^{-t} dt = e^{-1} - x e^{-x} - e^{-x} + e^{-1} = 2e^{-1} - (x+1)e^{-x}$$

### Partie B :

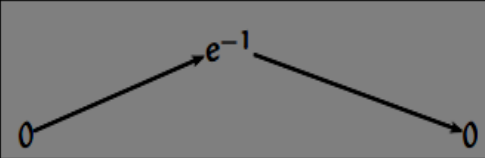
1) Soit  $n \geq 3$ . On a :

$$f(t) = \frac{t}{n} \Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{n}$$

On dresse le tableau de variation de  $g$  :

$$\forall t \in ]0; 1[, g'(t) = \frac{t f'(t) - f(t)}{t^2} = \frac{e^{-\frac{1}{t}}(1-t)}{t^3}$$

On en déduit donc le tableau de variations de :

|         |                                                                                      |   |           |   |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|---|
| t       | 0                                                                                    | 1 | $+\infty$ |   |
| $g'(t)$ | 0                                                                                    | + | 0         | - |
| f       |  |   |           |   |

De plus on sait que :

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$$

On a donc :

- $g \in \mathcal{C}^0([0; 1])$
- $g$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$
- $\frac{1}{n} \in g([0; 1]) = \left]0; \frac{1}{e}\right[$

D'après le **théorème de la bijection** :

$$\exists \alpha_n \in ]0; 1[ \text{ tel que } g(\alpha_n) = \frac{1}{n}$$

b) On a :

$$\forall n \geq 3, g(\alpha_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\alpha_{n+1})$$

Or  $g$  est strictement croissante sur  $]0; 1[$ . On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 3, \alpha_n > \alpha_{n+1}$$

**Donc  $(\alpha_n)$  est décroissante.**

De même on a :

$$\forall n \geq 3, g(\beta_n) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(\beta_{n+1})$$

Or  $g$  est strictement décroissante sur  $[1; +\infty[$ . On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 3, \beta_n < \beta_{n+1}$$

**Donc  $(\beta_n)$  est croissante.**

c)  $(\alpha_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

On pose :

$$\lim_n \alpha_n = \ell$$

On suppose  $\ell > 0$ . On a alors :

$$\forall n \geq 3, 1 > \alpha_n > \ell \Rightarrow g(\alpha_n) > g(\ell) \text{ (car } g \text{ est croissante sur } ]0; 1])$$

On a donc :

$$\forall n \geq 3, \frac{1}{n} > g(\ell) > 0$$

**Impossible** car  $\lim_n \frac{1}{n} = +\infty$ .

Donc  **$\ell = 0$**

De plus  $(\beta_n)$  est croissante, donc on a deux choix :

$$\begin{cases} \lim_n \beta_n = \ell' \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \lim_n \beta_n = +\infty \end{cases}$$

On suppose que  $\lim_n \beta_n = \ell' \in \mathbb{R}$

On a alors :

$$\forall n \geq 3, 1 < \beta_n < \ell \Rightarrow g(\beta_n) > g(\ell) \text{ (car } g \text{ est décroissante sur } ]1; +\infty])$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 3, \frac{1}{n} > g(\ell) > 0$$

**Impossible.**

Donc :

$$\lim_n \beta_n = +\infty$$

**Partie C :**

1) On sait que :  $x^2 y' + y = x^2$

Donc pour  $x = 0$  on a :

$$y(0) = 0 = u_0$$

2) a) On sait que :

$$x^2 y' + y = x^2 \Rightarrow 2xy' + x^2 y'' + y' = 2x$$

On en déduit donc pour  $x = 0$  que  **$y'(0) = 0 = u_1$**

De même on a :

$$x^2 y''' + 2xy'' + 2y' + y'' = 2$$

On a donc :

$$y''(0) = 2 = u_2$$

b) On pose :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On a alors :

$$f(0) = 0 = c, f'(0) = b = 0, f''(0) = 2a = 2$$

Si  $f$  est solution de  $(E)$  on a :

$$f(x) = x^2$$

On vérifie alors en posant  $f(x) = x^2$  :

$$x^2 \times 2x + x^2 = 2x^3 + x^2 \neq x^2$$

**Donc aucune fonction polynomiale de degré 2 n'est solution de  $(E)$ .**

3) a) On applique directement Leibniz :

$$(x^2 y')^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (y')^{(n-k)} = x^2 y^{(n+1)} + 2nx y^{(n)} + n(n-1) y^{(n-1)}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \geq 3, (x^2)^{(n)} = 0$$

On a alors :

$$\forall x \geq 0, x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx) y^{(n)}(x) + n(n-1) y^{(n-1)}(x) = 0$$

b) Pour  $n \geq 3$  en posant  $x = 0$  on a :

$$u_n = -n(n-1)u_{n-1}$$

c) On a :

$$u_n = -n(n-1)u_{n-1} = n(n-1)^2(n-2)u_{n-2} = -n(n-1)^2(n-2)^2(n-3)u_{n-3}$$

En réitérant le procédé, ou en faisant une récurrence, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = (-1)^n n! \times [(n-1)!]^2$$