

**Programme de Colle n°17
(12 au 16 février 2024)**

Dérivabilité

- Nombre dérivé comme taux de variation
- Développement limité d'ordre 1 :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement s'il existe et une fonction $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\epsilon(x) \text{ avec } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

- Toute fonction dérivable est continue
- Opérations sur les fonctions, dérivées d'une réciproque, dérivée n-ième et formule de Leibniz
- Théorème de Rolle, des accroissements finis.
- Fonctions lipchitziennes, contractantes, applications aux suites numériques $u_{n+1} = f(u_n)$
- Fonctions convexes

Polynôme

- Degré d'un polynôme, coefficient dominant
- Fonction polynômiale associée à un polynôme
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne, formule de Taylor

Questions de cours

TAF (Théorème des accroissements finis) : Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a; b]$, f est dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Propriété : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X - a) | P$$

Propriété (formule de Taylor pour les polynômes) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Exercices du type

- Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + 1)e^{3x} \end{cases}$$

- Etudier la convergence de la suite :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1 + e^{-u_n}) \end{cases}$$

- Déterminer tous les polynômes tels que :

$$(X^2 + 1)P''(X) - 6P(X) = 0$$