

DM n°6

Exercice 1 : Un grand classique, les polynômes de Tchebychev

On étudie pour tout entier naturel n les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

1) Montrer que si T_n existe, alors il est unique.

2) Vérifier que :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ P_2 = 2X^2 - 1 \end{cases}$$

3) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

4) Déterminer la parité de T_n , son degré ainsi que son coefficient dominant.

5) Déterminer l'ensemble des racines de T_n et en déduire sa décomposition en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

6) En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est paire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7) Montrer que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, (x^2 - 1)T_n''(x) + XT_n'(x) = n^2 T_n(x)$$

Exercice 2 : Mines-sup 2005

Dans toute cette partie on pose :

$$f: \begin{cases} [e; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{\ln(x)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)} \end{cases}$$

- 1)
 - a) Montrer que f est croissante sur $[e; +\infty[$.
 - b) Montrer que $[e; +\infty[$ est stable par f .
 - c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$
 - d) En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
- 2)
 - a) Calculer $f''(x)$.
 - b) En déduire que :

$$\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

3) Énoncé l'inégalité des accroissements finis.

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

5) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} .

Exercice facultatif : Problème 1 : Irrationalité de $\ln(2)$ **Partie A : Une suite qui converge vers $\ln(2)$**

Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Partie B : Critère de d'Alembert

On veut montrer le théorème suivant :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \text{ avec } \ell < 1 \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose de plus que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \text{ avec } 0 \leq \ell < 1$$

1) Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 0 < v_n < 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

3) Démontrer que la suite (u_n) converge, puis que sa limite est 0.

4) La réciproque du théorème est-elle vraie ?

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n e^{t \ln(2)} dt$$

1) Calculer J_0 et J_1 .

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n > 0$$

3) Démontrer que :

$$\forall D \in \mathbb{R}, D^n J_n \rightarrow 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

5) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers A_n tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n \left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n \left(-\frac{p}{q}\right) \right]$$

6) Montrer que si $D = 2p^3$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n J_n \in \mathbb{N}^*$$

7) En déduire l'irrationalité de $\ln(2)$.