Programme de colle n°18
(4 au 8 mars 2024)

Polynôme

- Degré d'un polynôme, coefficient dominant
- Fonction polynômiale associée à un polynôme
- Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$, division euclidienne, formule de Taylor
- Racine d'un polynôme, ordre de multiplicité
- Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Analyse asymptotique

- Définition d'un équivalent, « petit o » et « grand O » sur les suites et les fonctions.
- Définition d'un DL en un point a.
- Unicité du DL.
- Formule de Taylor-Young (sans démonstration)

Remarque : Nous n'avons vu que les développements limités de $\frac{1}{1-x}$, $\cos(x)$, e^x, $\sqrt{1+x}$ en utilisant la formule de Taylor.

On demande aux étudiants de savoir utiliser la formule de Taylor pour démontrer des DL de bases.

Questions de cours

Propriété: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (X-a)|P$$

Propriété (formule de Taylor pour les polynômes) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}, P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Propriété I.c.1 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Exercices du type

- Calculer la dérivée n-ième de :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+1)e^{3x} \end{cases}$$

- Déterminer tous les polynômes tels que :

$$(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$$

- Trouver une limite grâce à un équivalent !