Programme de colle n°19
(12 au 16 mars 2024)

Analyse asymptotique

- Définition d'un équivalent, « petit o » et « grand O » sur les suites et les fonctions.
- Définition d'un DL en un point a.
- Unicité du DL.
- Formule de Taylor-Young (sans démonstration)
- DL1 et dérivabilité
- Intégration
- Opérations sur les DL, quotient, produit, combinaison linéaire
- Applications pour le calcul des limites, recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à la tangente…

Espace vectoriel

- Espaces vectoriels de référence
- Sous-espaces vectoriel

Questions de cours

Propriété I.c.1 : Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Savoir redémontrer les DL suivants (en moins d'une minute !) :

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x}, x \mapsto e^x, x \mapsto \ln(1+x)\,, \cos, \sin, \mathrm{sh} \text{ et } \mathrm{ch}, \arctan, x \mapsto \sqrt{1+x}$$

Propriété III.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Exercices du type

Exercice C.2 : Déterminer le $DL_4(0)$ de :

$$f(x) = e^x \arctan(x)\,, g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}, h(x) = \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$$

Exercice D.3 : Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}$

Exercice D.4 : On pose :

$$f : x \mapsto \frac{-1 + \cos(x) + x\sin(x)}{x^2}$$

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2) Démontrer que f peut être prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est derivable en 0.
3) Montrer que f admet un extremum local en 0.

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.