Entrainement espace vectoriel pour le DS du 23 mars

Exercice 2 : Un peu d'espace vectoriel

On pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$$

- 1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
- 2) Rappeler et démontrer la formule de Taylor-Young pour les polynômes non nuls.
- 3) En déduire que

$$\forall P \in F, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(X) = (aX + b)(X - 1)^3$$

On exprimera a et b en fonction de P.

- 4) Déterminer deux polynômes P_1 et P_2 de F tel que :

$$F = \text{vect}(P_1, P_2)$$

- 5) Soit $P(X) = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$. Montrer que $P \in F$ et exprimer P comme combinaison linéaire de P_1 et P_2 .

- 6) On pose :

$$G = \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2)$$

- a) Démontrer que $G = \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2) = \mathbb{R}_2[X]$.

- b) Démontrer que :

$$\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$$

- c) On pose $P(X) = X^4$. Déterminer les deux polynômes $Q_1 \in F$ et $Q_2 \in G$ tel que :

$$P = Q_1 + Q_2$$

- 1) i) $F \neq \emptyset$.

En effet on pose $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. On a alors $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.

- ii) **F est stable par combinaison linéaire.**

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (P, Q) \in F^2$, on pose $R = \lambda P + \mu Q$. On a alors :

$$R(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$$

De même on a :

$$R'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = 0 = \lambda P''(1) + \mu Q''(1) = R''(1)$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel.

- 2) On sait que :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}, \forall a \in \mathbb{K}, P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

Démo :

On raisonne par récurrence sur le degré.

Initialisation : $\deg(P) = 0 \Rightarrow P(X) = P(a)$

De plus :

$$\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \frac{P^{(0)}(a)}{0!} (x - a)^0 = P(a)$$

Donc la propriété est vraie pour $\deg(P) = 0$.

Hérédité : Soit $\deg(P) = n$ fixé. On suppose vraie :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n + 1$.

On a alors :

$$\deg(P') = n$$

On en déduit donc que :

$$P'(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(P')^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

On pose :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{(k)!} (x-a)^k = P(a) + \sum_{k=1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{(k)!} (x-a)^k$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} Q'(X) &= \sum_{k=1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{(k)!} k(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{(k)!} k(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!} k(x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\deg(P)-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} k(x-a)^k \\ &= P'(X) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\exists c \in \mathbb{K}, P(X) = Q(X) + c$$

Or on sait que :

$$Q(a) = P(a) \Rightarrow c = 0$$

On en déduit donc que :

$$Q(X) = P(X) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{(k)!} (x-a)^k$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

3) On sait que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], P(X) = P(1) + P'(1)(X-1) + P''(1) \frac{(X-1)^2}{2} + P^{(3)}(1) \frac{(X-1)^3}{6} + P^{(4)}(1) \frac{(X-1)^4}{24}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(X) = P^{(3)}(1) \frac{(X-1)^3}{6} + P^{(4)}(1) \frac{(X-1)^4}{24} = \left(\frac{P^{(3)}(1)}{6} + \frac{P^{(4)}(1)}{24} (X-1) \right) (X-1)^3 \\ &= \left(\frac{P^{(4)}(1)}{24} X + \frac{P^{(3)}(1)}{6} - \frac{P^{(4)}(1)}{24} \right) (X-1)^3 \\ &= (aX + b)(X-1)^3 \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} a = \frac{P^{(4)}(1)}{24} \\ b = \frac{P^{(3)}(1)}{6} - \frac{P^{(4)}(1)}{24} \end{cases}$$

4) On sait d'après la question précédente que :

$$F \subset \{(aX + b)(X-1)^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

De plus on sait que :

$$P \in \{(aX + b)(X-1)^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \Rightarrow (X-1)^3 | P \Rightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$$

On en déduit donc que :

$$F = \{(aX + b)(X-1)^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} P &\in \{(aX + b)(X-1)^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P &= (aX + b)(X-1)^3 = aX(X-1)^3 + b(X-1)^3 = aP_1(X) + bP_2(X) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} P_1(X) = X(X-1)^3 \\ P_2(X) = (X-1)^3 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$F = \{(aX + b)(X-1)^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}(X(X-1)^3, (X-1)^3)$$

5) On a :

$$\begin{cases} P(1) = 3 - 8 + 6 - 1 = 0 \\ P'(1) = 12 - 24 + 12 = 0 \Rightarrow P \in F \\ P''(1) = 36 - 48 + 12 = 0 \end{cases}$$

De plus on sait que :

$$P^{(3)}(1) = 72 - 48 = 24 \text{ et } P^{(4)}(1) = 72$$

On en déduit donc d'après les questions précédentes que :

$$P(X) = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1 = (3X + 1)(X - 1)^3 = 3 \times P_1(X) + P_2(X)$$

6) a) C'est une égalité d'ensemble. On peut le démontrer par double inclusion.

i) Montrons que $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2)$

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P(X) = P(1) + P'(1)(X - 1) + \frac{P''(1)}{2}(X - 1)^2 \in \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}_2[X] \subset \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2)$$

ii) Montrons que $\text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2) \subset \mathbb{R}_2[X]$

On sait que :

$$\begin{cases} 1 \in \mathbb{R}_2[X] \\ X - 1 \in \mathbb{R}_2[X] \\ (X - 1)^2 \in \mathbb{R}_2[X] \end{cases} \Rightarrow \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2) \subset \mathbb{R}_2[X]$$

On a donc :

$$G = \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2) = \mathbb{R}_2[X]$$

b) On le fait en deux étapes.

On sait que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], P(X) = \underbrace{P(1) + P'(1)(X - 1) + P''(1)\frac{(X - 1)^2}{2}}_{=Q_1(X) \in G} + \underbrace{P^{(3)}(1)\frac{(X - 1)^3}{6} + P^{(4)}(1)\frac{(X - 1)^4}{24}}_{=Q_2(X) \in F} = Q_1(X) + Q_2(X)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}_4[X] = F + G$$

De plus on sait que :

$$P \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \\ P \in \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2) \end{cases} \Rightarrow P(X) = P(1) + P'(1)(X - 1) + P''(1)\frac{(X - 1)^2}{2} = 0_{\mathbb{R}[X]}(X)$$

On en déduit donc que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}_4[X] = F \oplus G$$

c) On sait que :

$$P(1) = 1, P'(1) = 4, P''(1) = 12, P^{(3)}(1) = 24 = P^{(4)}(1)$$

On en déduit donc d'après la formule de Taylor que :

$$P(X) = X^4 = \underbrace{1 + 4(X - 1) + 6(X - 1)^2}_{=Q_1(X)} + \underbrace{4(X - 1)^3 + (X - 1)^4}_{=Q_2(X)}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} Q_1(X) = 1 + 4(X - 1) + 6(X - 1)^2 = 6X^2 - 16X + 3 \\ Q_2(X) = X^4 - 6X^2 + 16X - 3 \end{cases}$$

Exercice 2 : Un peu d'espace vectoriel

On pose :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

2) a) Montrer que $F = \{(aX + b)(X - 1)^3; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

b) En déduire que F est de dimension 2 et déterminer une base $B = (P_1, P_2)$ de F. (C'est-à-dire que $F = \text{vect}(P_1, P_2)$).

3) Soit $P(X) = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$.

- a) Montrer que $P \in F$.
 b) Exprimer P comme combinaison linéaire de P_1 et P_2 .

1) On doit montrer trois choses :

i) $0_{\mathbb{R}_4[X]} \in F$

ii) Soit $(P_1, P_2) \in F^2$. On pose :

$$Q = P_1 + P_2 \Rightarrow Q' = P'_1 + P'_2 \Rightarrow Q'' = P''_1 + P''_2$$

On a donc :

$$Q(1) = P_1(1) + P_2(1) = 0 = Q'(1) = Q''(1)$$

Donc $Q = P_1 + P_2 \in F$

iii) Soit $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times F$. On pose :

$$Q = \lambda P \Rightarrow Q' = \lambda P' \Rightarrow Q'' = \lambda P''$$

On a donc :

$$Q(1) = \lambda P(1) = 0 = Q'(1) = Q''(1)$$

Donc $Q = \lambda P \in F$

2) a) On peut raisonner par équivalence ou bien montrer une double inclusion.

On a :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \text{ est racine multiple d'ordre au moins } 3 \\ &\Leftrightarrow (X-1)^3 | P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (X-1)^3 Q \end{aligned}$$

Or on sait que $P \in \mathbb{R}_4[X] \Rightarrow \deg(P) \leq 4$

Or on a :

$$\begin{aligned} P = (X-1)^3 Q &\Leftrightarrow \deg(P) = \deg((X-1)^3 Q) = 3 + \deg(Q) \leq 4 \\ &\Leftrightarrow \deg(Q) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, Q(X) = aX + b \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$P \in F \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X-1)^3(aX + b)$$

On en déduit donc que :

$$F = \{(aX + b)(X-1)^3; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

b) On a : $P \in F \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = (X-1)^3(aX + b) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = aX(X-1)^3 + b(X-1)^3$

Ainsi la famille $\mathcal{B} = (X(X-1)^3, (X-1)^3)$ est **génératrice** de F .

C'est aussi une famille **libre** car c'est une famille de polynômes échelonnés. On en déduit donc que :

$$F = \text{vect}(X(X-1)^3, (X-1)^3) \text{ et } \dim(F) = 2$$

3) a) $P(X) = 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1$

On a donc :

$$P(1) = 0, P'(1) = 12 - 24 + 12 = 0, P''(1) = 36 - 48 + 12 = 0$$

Donc $P \in F$

b) On calcule :

$$\begin{aligned} 3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1 &= (X-1)^3 + Q(X) \\ &= X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + Q(X) \\ \Rightarrow Q(X) &= 3X^4 - 9X^3 + 9X^2 - 3X \\ &= 3X(X^3 - 3X^2 + 3X + 1) \\ &= 3X(X-1)^3 \\ \Rightarrow P &= 3X(X-1)^3 + (X-1)^3 \end{aligned}$$