Correction DM n°6

Exercice 1 : Un grand classique, les polynômes de Tchebychev

On étudie pour tout entier naturel n les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

1) Montrer que si T_n existe, alors il est unique.
2) Vérifier que :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ P_2 = 2X^2 - 1 \end{cases}$$

3) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

4) Déterminer la parité de T_n, son degré ainsi que son coefficient dominant.
5) Déterminer l'ensemble des racines de T_n et en déduire sa décomposition en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.
6) En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \text{ si n est paire} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

7) Montrer que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, (x^2 - 1)T_n''(x) + XT_n'(x) = n^2 T_n(x)$$

1) Soit n un entier naturel. On suppose qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = Q_n(\cos(\theta))$$

On pose :

$$H_n = P_n - Q_n$$

On a alors :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, H_n(\cos(\theta)) = 0$$

Or on sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], \exists!\, \theta \in [0; \pi], x = \cos(\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-1; 1], H_n(x) = 0$$

Donc H_n admet une infinité de racines. Donc $H_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{H_n = P_n - Q_n = 0_{\mathbb{R}[X]} \Longrightarrow P_n = Q_n}$$

Donc si T_n existe, alors il est unique.
2) On sait que :

$$P_0 = 1 \Longrightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}, P_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(\mathbf{0} \times \theta)$$

Donc par unicité on en déduit que :

$$T_0 = P_0$$

De même on a :

$$P_1 = X \Longrightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}, P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(\mathbf{1} \times \theta)$$

Donc par unicité on en déduit que :

$$T_1 = P_1$$

De même on a :

$$P_2 = 2X^2 - 1$$

$$\Longrightarrow \forall \theta \in \mathbb{R}, P_2(\cos(\theta)) = 2 \times \cos^2(\theta) - 1 = 2 \times \cos^2(\theta) - (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall \theta \in \mathbb{R}, P_2(\cos(\theta)) = \cos(2\theta)}$$

Donc par unicité on en déduit que :

$$T_2 = P_2$$

3) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Proposition(n) = "T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)"$$

Remarque : *On ne fait pas cet question par récurrence car l'on a :*

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, 2\cos(\theta)\,T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big) - \cos(n\theta)$$
$$= 2\cos(\theta)\cos(n\theta+\theta) - \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\left(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\right) - \cos(n\theta)$$
$$= 2\cos^2(\theta)\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\underbrace{2\cos(\theta)\sin(\theta)}_{\sin(2\theta)} - \cos(n\theta)$$
$$= \cos(n\theta)\left(2\cos^2(\theta)-1\right) - \sin(n\theta)\sin(2\theta) = \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta)$$
$$= \cos\big((n+2)\theta\big)$$
$$= T_{n+2}(\cos\theta)$$

Par unicité on en déduit que :

$$\mathbf{T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)}$$

Voici la récurrence :

Initialisation : Soit n=0. On a :

$$2XT_1(X) - T_0(X) = 2X(X) - 1 = 2X^2 - 1 = T_2(X)$$

Donc $Proposition(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $Proposition(n)$. On a donc :

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

On veut montrer que :

$$T_{n+3}(X) = 2XT_{n+2}(X) - T_{n+1}(X)$$

On sait que :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}, 2\cos(\theta)\,T_{n+2}(\cos(\theta)) - T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos\big((n+2)\theta\big) - \cos\big((n+1)\theta\big)$$
$$= 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta+\theta\big) - \cos\big((n+1)\theta\big)$$
$$= 2\cos(\theta)\Big(\cos\big((n+1)\theta\big)\cos(\theta) - \sin\big((n+1)\theta\big)\sin(\theta)\Big) - \cos\big((n+1)\theta\big)$$
$$= 2\cos^2(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big) - \sin\big((n+1)\theta\big)\underbrace{2\cos(\theta)\sin(\theta)}_{\sin(2\theta)} - \cos\big((n+1)\theta\big)$$
$$= \cos\big((n+1)\theta\big)\left(2\cos^2(\theta)-1\right) - \sin\big((n+1)\theta\big)\sin(2\theta)$$
$$= \cos\big((n+1)\theta\big)\cos(2\theta) - \sin\big((n+1)\theta\big)\sin(2\theta)$$
$$= \cos\big((n+1)\theta + 2\theta\big)$$
$$= \cos\big((n+3)\theta\big)$$
$$= T_{n+3}(\cos(\theta))$$

Par unicité on en déduit que :

$$T_{n+3}(X) = 2XT_{n+2}(X) - T_{n+1}(X)$$

Donc proposition(n+1) est vraie.

En aucun cas on ne se sert de l'hypothèse de récurrence, ce n'est donc pas une récurrence mais une démonstration !

Conclusion : Proposition(0) est vraie et proposition(n) est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

4) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, Proposition2(n) =$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, Proposition2(n) = \begin{cases} \deg(T_n) = n \\ CD(T_n) = 2^{n-1} \\ T_n \text{ est paire si } n \text{ est paire et impaire si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

Remarque : Comme la relation de récurrence $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ est d'ordre 2, on doit faire une récurrence double !

Initialisation : Pour n = 1 et n=2 on a :

$$\begin{cases} T_2 = 2X^2 - 1 \\ T_1 = X \end{cases}$$

On a donc : $Proposition2(1)$ et $Proposition2(2)$ qui sont vraies.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $Proposition2(n)$ et $Proposition2(n+1)$. On veut montrer que :

$$\begin{cases} \deg(T_{n+2}) = n+2 \\ CD(T_{n+2}) = 2^{n+1} \\ T_{n+2} \text{ est paire si } n \text{ est paire et impaire si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

On a :

$$\mathrm{T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{T_{n+2}(-X) = -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X)}$$

1er cas : Si n est paire on a n+1 impaire et n+2 paire donc :

$$\mathrm{T_{n+2}(-X) = -2X}\underbrace{\mathrm{T_{n+1}(-X)}}_{=-T_{n+1}(X)} - \underbrace{\mathrm{T_n(-X)}}_{=T_n(X)} = T_{n+2}(X)$$

Donc $\mathrm{T_{n+2}}$ est paire.

2ième cas : Si n est impaire on a n+1 paire et n+2 impaire donc :

$$\mathrm{T_{n+2}(-X) = -2X}\underbrace{\mathrm{T_{n+1}(-X)}}_{=T_{n+1}(X)} - \underbrace{\mathrm{T_n(-X)}}_{=-T_n(X)} = -T_{n+2}(X)$$

Donc $\mathrm{T_{n+2}}$ est impaire.

De plus on a :

$$\begin{cases} \deg(T_n) = n \\ CD(T_n) = 2^{n-1} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{T_n(X)} = 2^{n-1}X^n + \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k}X^k$$

$$\begin{cases} \deg(T_{n+1}) = n+1 \\ CD(T_{n+1}) = 2^n \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{T_{n+1}(X)} = 2^n X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} t_{n+1,k}X^k$$

On a donc :

$$\mathrm{T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)}$$
$$= 2X\left(2^n X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} t_{n+1,k}X^k\right) - \left(2^{n-1}X^n + \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k}X^k\right)$$
$$= 2^{n+1}X^{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2t_{n+1,k}X^{k+1} - \left(2^{n-1}X^n + \sum_{k=0}^{n-1} t_{n,k}X^k\right)$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \deg(T_{n+2}) = n+2 \\ CD(T_{n+2}) = 2^{n+1} \end{cases}$$

On en déduit donc que $Proposition2(n+2)$ est vraie.

Conclusion : $Proposition2(1)$ et $Proposition2(2)$ sont vraies et $Proposition2(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence double, $Proposition2(n)$ est toujours vraie pour tout entier naturel n non nul.

5) On cherche à résoudre :

$$\mathrm{T}_n(X) = 0$$

On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On résout :

$$\cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} ; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} ; k \in \mathbb{Z}$$

Or on a :

$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \in \,]0; \pi[$$

On a donc :

$$\forall (k,j) \in ([\![0; n-1]\!])^2, k \neq j \Longrightarrow \cos(\theta_k) \neq \cos(\theta_j)$$

On a donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in [\![0; n-1]\!], \mathrm{T}_n(\cos(\theta_k)) = 0$$

La famille $(\cos(\theta_k))_{0\leq k\leq n-1}$ est donc une famille de n éléments tous distincts racines de T_n.
Comme T_n est de degré n, ce sont les seuls racines !
On a donc :

$$\mathbf{T}_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

6) Il suffit d'utiliser les relations coefficient-racines.
On sait que si :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k \ avec\ p_n \neq 0\ et\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\ les\ racines\ de\ P\ alors :$$

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{(-1)^n}{p_n} p_0$$

On a donc ici :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} t_0$$

En notant :

$$\mathrm{T}_n(X) = \sum_{k=0}^{n} t_k X^k \ \ (on\ sait\ que\ t_n = 2^{n-1})$$

Il nous reste à déterminer $t_0 = T_n(0)$
On sait que si n est impaire, T_n est impaire, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{2n+1}(0) = 0$$

On pose ensuite :

$$H_n = T_{2n}(0) = (-1)^n$$

Initialisation : On sait que $T_0(X) = 1 \Longrightarrow H_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie H_n. On sait que :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{2n+2}(\mathrm{X}) &= 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{2n+1}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}_{2n}(\mathrm{X})\\ \Longrightarrow \mathrm{T}_{2n+2}(0) &= -\mathrm{T}_{2n}(0)\\ &= -(-1)^n\\ &= (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion : H_0 est vraie et H_n est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque : On a aussi :

$$\boldsymbol{T_n(0) = Tn\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0\ si\ n\ est\ impair \\ (-1)^n\ si\ n\ est\ pair \end{cases}}$$

C'est beaucoup plus rapide !

On a donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & \text{si n est paire} \\ 0\ \text{sinon} \end{cases}$$

7) On sait que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

On dérive une première fois :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\mathrm{T'}_n(\cos(\theta)) \times \sin(\theta) = -n \times \sin(n\theta)$$

On dérive une seconde fois :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\mathrm{T'}_n(\cos(\theta)) \times \cos(\theta) + \mathrm{T}_n''(\cos(\theta))\sin^2(\theta) = -n \times \cos(n\theta)$$

Or on sait que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

On en déduit donc que :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, T_n''(\cos(\theta))(1 - \cos^2(\theta)) - T'_n(\cos(\theta)) \times \cos(\theta) = -n \times \cos(n\theta)$$

On a donc :

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, T_n''(\cos(\theta))(\cos^2(\theta) - 1) + T'_n(\cos(\theta)) \times \cos(\theta) = n \times \cos(n\theta)$$

Ce qui donne :

$$\forall(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, (x^2 - 1)T_n''(x) + XT_n'(x) = n^2 T_n(x)$$

Exercice 2 : Mines-sup 2005

Dans toute cette partie on pose :

$$f: \begin{cases} [e; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln(v_n)} \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est croissante sur $[e; +\infty[$.
   b) Montrer que $[e; +\infty[$ est stable par f.
   c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$
   d) En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

2) a) Calculer $f''(x)$.
   b) En déduire que :

$$\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

3) Enoncé l'inégalité des accroissements finis.

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$$

5) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12}.

1) On pose la fonction :

$$f: \begin{cases} [e; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases}$$

On sait que $f \in \mathcal{C}^1([e; +\infty[)$ et :

$$\forall x \in [e, +\infty[, f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)} \geq 0$$

On en déduit donc que f est croissante sur $[e; +\infty[$.

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n): "v_n \geq e"$$

Initialisation : $n = 0$. $v_0 = 3 > e \Longrightarrow \mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel n fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned} v_n \geq e &\Longrightarrow f(v_n) \geq f(e) \text{ car f est croissante sur } [e, +\infty[\\ &\Longrightarrow v_{n+1} \geq e \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e}$$

2) On sait que la suite (v_n) est monotone car f est croissante sur $[e; +\infty[$ et l'intervalle $[e; +\infty[$ est stable par f.

De plus on sait que :

$$v_1 - v_0 = \frac{v_0(1-\ln(v_0))}{\ln(v_0)} = \frac{3}{\ln(3)} \times (1-\ln(3)) < 0$$

On en déduit donc que (v_n) est décroissante, minorée par e donc elle converge.
De plus on sait que $\lim\limits_{n} v_n = \ell$ vérifie l'équation $f(x) = x$.
Or on sait que :

$$\frac{x}{\ln(x)} = x \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\lim\limits_{n} v_n = e}$$

3) On sait que :

$$\forall x \in [e;+\infty[, f'(x) = \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$$

Cette fonction est dure à calculer. Etudions la dérivée seconde :

$$\forall x \geq e, f''(x) = \frac{\frac{\ln^2(x)}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}(\ln(x)-1)}{\ln^4(x)} = \frac{2-\ln(x)}{x\ln(x)}$$

On sait que :

$$2 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	e		$e2$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$
f'		$\nearrow$		$\searrow$

De plus on sait que : $f'(e) = 0$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

On a de plus :

$$f'(e^2) = \frac{1}{4}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}}$$

5) On sait d'après la question 3) que f est $\frac{1}{4}$ −lipschitzienne (donc contractante). On en déduit donc que :

$$\forall (x,y) \in [e.+\infty[, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(v_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|v_n - e|$$

$$\mathbf{\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |v_0 - e| \ \ (récurrence\ immédiate)}$$

6) On a :

$$4^5 > 1000 \Longrightarrow 4^{20} > 10^{12} \Longrightarrow |v_{20} - e| \leq 10^{-12}$$

On peut donc en déduire que v_{20} est une valeur approchée de e à 10^{-12}

Exercice facultatif : Problème 1 : Irrationnalité de $\ln(2)$

Partie A : Une suite qui converge vers $\boldsymbol{ln}(2)$

Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^{n+1} I_{n+1}$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) En déduire la valeur de :

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Partie B : Critère de d'Alembert

On veut montrer le théorème suivant :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \text{ avec } \ell < 1 \Rightarrow u_n \to 0$$

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On suppose de plus que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \text{ avec } 0 \leq \ell < 1$$

1) Démontrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, 0 < v_n < 1$$

2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
3) Démontrer que la suite (u_n) converge, puis que sa limite est 0.
4) La réciproque du théorème est-elle vraie ?

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} dt$$

1) Calculer J_0 et J_1.
2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n > 0$$

3) Démontrer que :

$$\forall D \in \mathbb{R}, D^n J_n \to 0$$

4) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2} J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2} J_{n+1}$$

5) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale à coefficients entiers A_n tel que :

$$J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1} \left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2} A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

6) Montrer que si $D = 2p^3$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, D^n J_n \in \mathbb{N}^*$$

7) En déduire l'irrationalité de $\ln(2)$.

Partie A : Etude d'une intégrale
Dans toute cette partie on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$$

1) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto \frac{t^n}{1+t} \in \mathcal{C}^0([0;1])$$

Donc f_n admet une primitive donc I_n est bien définie.
2) On a :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln(2)$$

De plus on a :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}dt = 1 - \ln(2)$$

3) a) On sait que :

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{(1+t)^2 - 2(t+1) + 2}{1+t}dt = \int_0^1 (1+t) - 2 + \frac{2}{1+t}dt$$

On pose $y = 1 + t$
a) Les bornes

$$t = 0 \Longrightarrow y = 1 \text{ et } t = 1 \Longrightarrow y = 2$$

b) Calcul de dt
On sait que $t : y \mapsto y - 1 \in \mathcal{C}^1([1,2])$ et :

$$\frac{dt}{dy} = 1$$

c) On remplace :

$$\int_0^1 (1+t) - 2 + \frac{2}{1+t}dt = \int_1^2 \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right)dy$$

b) On a :

$$\int_1^2 \left(y - 2 + \frac{1}{y}\right)dy = [y^2 - 2y + \ln(y)]_1^2 = \ln(2) - 1$$

4) On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-t)^k\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,dt = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}dt = \ln(2) - (-1)^{n+1}I_{n+1}$$

Partie B : Convergence d'une série
1) a) Enoncer le critère spécial des séries alternées.
b) Démontrer le critère spécial des séries alternées.
C'est du cours !
2) Démontrer, sans utiliser ce qui a été fait dans la partie A, que la série suivante converge :

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0. De plus comme (u_n) est alternée, on en déduit donc que (u_n) vérifie le critère spécial des séries alternées ! Donc $\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ converge.

3) a) Démontrer que :

On sait que :

$$\forall t \in [0;1], 1 \leq 1+t \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \Longrightarrow \forall t \in [0;1], 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{n+1}\,dt$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

b) D'après la question précédente, on en déduit donc que :

$$\lim_n I_{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

Partie C : Irrationalité de $\ln(2)$

On va prouver l'irrationalité de $\ln(2)$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ln(2) = \frac{p}{q} \text{ et } p \wedge q = 1$$

On pose de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt$$

1) On a :

$$J_0 = \frac{1}{0!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^0 e^{t\ln(2)}dt = \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt = \frac{1}{\ln(2)}\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\ln(2)}$$

$$J_1 = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^1 e^{t\ln(2)}dt = \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt - \int_{-1}^{1} t^2 e^{t\ln(2)}dt$$

$$= \frac{3}{2\ln(2)} - \left(\left[\frac{t^2}{\ln(2)}2^t\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\ln(2)}\int_{-1}^{1} te^{t\ln(2)}dt\right)$$

$$= \frac{3}{2\ln(2)} - \left(\frac{3}{2\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)}\left(\left[\frac{t}{\ln(2)}2^t\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\ln(2)}\int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\ln(2)}\left(\frac{5}{2\ln(2)} - \frac{2}{\ln^2(2)} \times \frac{3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow J_1 = \frac{5}{\ln^2(2)} - \frac{3}{\ln^3(2)}$$

2) On sait que :

$$\forall t \in]-1;1[, (1-t^2)^n e^{t\ln(2)} > 0 \Longrightarrow \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt > 0 \Longrightarrow J_n > 0$$

3) On sait que :

$$\forall t \in [-1;1], D^n J_n = \frac{D^n}{n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt$$

On pose :

$$u_n = \frac{|D|^n}{n!} \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|D|^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{|D|^n} = \frac{|D|}{n+1} \to 0$$

On en déduit donc d'après le critère de d'Alembert que :

$$\lim_n \frac{|D|^n}{n!} = 0$$

De plus on sait que :

$$\forall t \in [-1;1], 1-t^2 \leq 1 \Longrightarrow \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt \leq \int_{-1}^{1} e^{t\ln(2)}dt = \frac{3}{2\ln(2)}$$

On en déduit donc que :

$$|D^n J_n| \leq \frac{3}{2\ln(2)}|u_n|$$

De plus on sait que :

$$\lim_n \frac{3}{2\ln(2)}|u_n| = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n D^n J_n = 0$$

4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+2}e^{t\ln(2)}dt$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}\left(\underbrace{\left[\frac{(1-t^2)^{n+2}e^{t\ln(2)}}{\ln(2)}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{2(n+2)}{\ln(2)}\int_{-1}^{1}t(1-t^2)^{n+1}e^{t\ln(2)}dt\right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)!\ln(2)}\left(\underbrace{\left[\frac{t(1-t^2)^{n+1}}{\ln(2)}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{1}{\ln(2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+1}e^{t\ln(2)}dt + \frac{2(n+1)}{\ln(2)}\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt\right)$$

$$= -\frac{2}{\ln^2(2)}J_{n+1} - \frac{4}{n!\ln^2(2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt + \frac{4}{n!\ln^2(2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{t\ln(2)}dt$$

$$= \frac{-2-4(n+1)}{\ln^2(2)}J_{n+1} + \frac{4}{\ln^2(2)}J_n$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{4q^2}{p^2}J_n - \frac{(4n+6)q^2}{p^2}J_{n+1}$$

5) On fait une récurrence double. On pose :

$$\mathcal{P}(n): "J_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]"$$

Initialisation : $n = 0 : J_0 = \frac{3}{2\ln(2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^1\left[2\times 1 - \frac{1}{2}\times 1\right] \Longrightarrow \mathcal{P}(0)$ est vraie avec $A_0(X) = 1$

$n = 1 : J_1 = \frac{5}{\ln^2(2)} - \frac{3}{\ln^3(2)} = \frac{5\ln(2)-3}{\ln^3(2)} = \left(\frac{q}{p}\right)^3\left[2\times(2\ln(2)-2) - \frac{1}{2}(-2\ln(2)-2)\right] \Longrightarrow \mathcal{P}(1)$ est vraie avec $A_1(X) = 2X - 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose vraie $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \in [\![0; n+1]\!]$. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On sait que :

$$J_{n+2}=\frac{4q^2}{p^2}J_n-\frac{(4n+6)q^2}{p^2}J_{n+1}$$

$$=\frac{4q^2}{p^2}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]-\frac{(4n+6)q^2}{p^2}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+3}\left[2A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

$$=\frac{q^2}{p^2}\left[-(4n+6)\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+3}\left(2A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right)+4\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left(2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\right]$$

$$=\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+5}\left[2\left(4\left(\frac{p}{q}\right)^2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-(4n+6)A_{n+1}\left(\frac{p}{q}\right)\right)-\frac{1}{2}\left(4\left(\frac{p}{q}\right)^2A_n\left(-\frac{p}{q}\right)-(4n+6)A_{n+1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right)\right]$$

$$=\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+5}\left[2A_{n+2}\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_{n+2}\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

On pose :

$$A_{n+2}(X)=4X^2A_n(X)-(4n+6)A_{n+1}(X)$$

On en déduit donc que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de la récurrence double !

6) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}, A_n(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n \text{ avec } (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$$

On a alors :

$$q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)=a_0q^{2n+1}+a_1pq^{2n}+\cdots+a_np^nq^{n+1}\in\mathbb{Z}$$

De même on a : $q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\in\mathbb{Z}$.

On en déduit donc que :

$$D^nJ_n=2^np^{3n}J_n=2^np^{3n}\left(\frac{q}{p}\right)^{2n+1}\left[2A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right]$$

$$=2^np^{n-1}\left(2q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)\right)$$

$$=p^{n-1}\left(2^{n+1}\underbrace{q^{2n+1}A_n\left(\frac{p}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-2^{n-1}\underbrace{q^{2n+1}A_n\left(-\frac{p}{q}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\geq 1, (2p^3)^nJ_n\in\mathbb{N}^*$$

7) On sait que :

$$\forall n\geq 1, (2p^3)^nJ_n\in\mathbb{N}^*\Longrightarrow\forall n\geq 1, (2p^3)^nJ_n\geq 1$$

De plus on sait que :

$$\lim_n (2p^3)^nJ_n=0$$

Cela est impossible. Donc $\ln(2)$ est un irrationnel !