

DM n°7

Problème 1: Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie A : Convergence de deux suites

On considère les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \ln(u_n)$$

- 1) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
- 2) En déduire que (v_n) converge.
- 3) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Calcul de la constante k

Dans cette partie on souhaite prouver que $k = \sqrt{2\pi}$.

On pose la suite (W_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

- 1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

- b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

- 2) Démontrer que la suite $nW_n W_{n+1}$ est constante.
- 3) En déduire que :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \pi$$

- 4) Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Problème facultatif

Après avoir démontré l'irrationalité de $\sqrt{2}$ dans le cours, de e et de $\ln(2)$ dans les précédents devoirs, je vous propose ici de démontrer l'irrationalité de π . Pour ce faire nous allons utiliser un vieux résultat :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie B : Irrationalité de π

Dans un premier temps nous allons montrer que π^2 est irrationnel.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^2(1-x)^n}{n!}$$

- 1) a) Déterminer les valeurs de $(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n a_{n+k} x^{n+k}$$

- b) Démontrer que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, f_n^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i > 2n \\ a_i \times (n+i) \times \dots \times (n+1) \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, f_n^{(i)}(0) \in \mathbb{Z}$$

d) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, f_n^{(i)}(1) \in \mathbb{Z}$$

(Indice : On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$)

Dans les questions suivantes on veut montrer que π^2 est un irrationnel et l'on va raisonner par l'absurde. On suppose que :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, b \neq 0, \text{ tel que } \pi^2 = \frac{a}{b}$$

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = b^n \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x) \right)$$

a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x)$$

De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin(\pi x) dx$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x) \sin(\pi x)$$

Puis montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{Z}$$

3) On pose la suite :

$$u_n = \frac{a^n}{n!} \text{ (où } a = \pi \times b \text{ définie précédemment)}$$

a) Montrer que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{2}$$

b) Montrer que !

$$\forall x \in [0; 1], 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$$

c) Démontrer que :

$$\forall n \geq n_0, A_n \in]0; 1[$$

d) En déduire que π^2 est irrationnel, de même que π .