Programme de colle n°21
(25 au 29 mars)
Espace vectoriel

- Espaces vectoriels de référence
- Sous-espaces vectoriel
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie non vide X d'un espace vectoriel : $\mathrm{vect}(X)$
- Somme de sous-espaces vectoriel, somme directe.

Famille finie de vecteurs

- Famille libre, liée, génératrice
- Base d'un espace vectoriel, bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}_{n,p}(\mathbb{C})$
- Somme directe et base adaptée

Espace vectoriel de dimension finie

- Base et dimensión d'un ev de dimensión finie
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète
- Dimension d'un produit cartésien

Démo de cours

Propriété III.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Propriété III.c.3 : Soit $(e_1, \dots e_n)$ une base de E. Alors :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], E = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \mathrm{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

Propriété I.a.2 (Méthode des rectangles à gauche) : Si f est continue sur [a; b] alors :

$$\lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

(Démo dans le cas où f est lipchitzienne.)

Propriété (Taylor avec reste intégrale) : Soient n un entier naturel f: [a; b] → $\mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Exercices du type

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Déterminer des va de $S_n(\mathbb{R})$, de $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}, x + 2y + z = 0 \right\}, \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}, \{M \in M_n(\mathbb{R}), tr(M) = 0\}$.

Exercice E.1 : Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \to 0} \int_{-x}^{x} \sin(t^2)\, dt \quad \text{b) } \lim_{x \to +\infty} \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(t)^2} dt$$

Exercice D.2 : Calculer la limite de:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}};\ u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$