Correction DS n°6

Exercice 1 : Une suite classique

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}\ si\ x\neq 0\\ 1\ si\ x=0\end{cases}\end{array}\right.$$

1) Déterminer le $DL_2(0)$ de f.

2) a) En déduire que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donnera la valeur de $f'(0)$.

b) Etudier la position de f avec sa tangente (notée (T_0)), au point d'abscisse $x=0$. On fera un graphique pour représenter cette position !

c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $\mathbb{R}$.

(***Indice*** *: On pourra montrer que* 0 *n'est pas solution de cette équation*).

5) Montrer que :

$$\forall x\geq 0, |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

6) On pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}u_0\in]0;1[\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{e^{u_n}-1}\end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in]0;1[$$

b) En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-\ln(2)|\leq\frac{1}{2^n}$$

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

1) On a :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Longrightarrow\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)$$

$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)=\mathbf{1-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}x^2+o(x^2)}$$

2) a) Comme f admet un $DL_2(0)$, elle admet un $DL_1(0)$.

De plus on a :

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$$

Donc f est continue, dérivable en 0 et $f'(0)=-\frac{1}{2}$

b) D'après le $DL_1(0)$ on a :

$$(T_0): y=1-\frac{1}{2}x$$

De plus on a :

$$f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{12}x^2+o(x^2)$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{f(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{12}x^2}$$

Ainsi au voisinage de 0, f est au-dessus de sa tangente.

c) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

Par composée, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^1$, sur chaque intervalle $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

De plus on a :

$$f'(x)=\frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x-x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=-\frac{1}{2}+o(1)$$

Ainsi on a :

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{1}{2}=f'(0)$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On aurait pu utiliser le calcul de f' en dehors de 0, puis chercher la limite en 0. On aurait trouver $-\frac{1}{2}$ et on aurait pu conclure que $f'(0)$ existe et vaut $-\frac{1}{2}$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème de la limite-dérivée.

3) On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*, f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

Etudions le signe de $x\mapsto e^x-1-xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

On a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$$

On a ainsi le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	0	$\searrow$
$f'(x)$		$-$	
f		$\searrow$	

On en déduit donc que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)<0$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) On a $f(0)=1$ donc 0 n'est pas solution de cette équation.

De plus sur $\mathbb{R}^*$:

$$\boldsymbol{f(x)=x\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1}=x\Leftrightarrow e^x-1=1\Leftrightarrow x=\ln(2)}$$

5) On a :

$$\forall x\geq 0, f'(x)<0$$

Montrons que :

$$\forall x\geq 0, -\frac{1}{2}\leq f'(x)$$

On a :

$$\forall x\geq 0, f'(x)+\frac{1}{2}=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{2}=\frac{2e^x-2-2xe^x+(e^x-1)^2}{2(e^x-1)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}-2xe^x-1}{2(e^x-1)^2}=\frac{u(x)}{2(e^x-1)^2}$$

On a :

$$\forall x\geq 0, u'(x)=2e^{2x}-2e^x-2xe^x=2e^x(e^x-x-1)\geq 0\ (par\ convexit\acute{e})$$

On en déduit donc que u est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $u(0)=0$. On a donc :

$$\forall x\geq 0, u(x)\geq 0\Longrightarrow f'(x)\geq -\frac{1}{2}$$

Ainsi on a :

$$\forall x\geq 0, |f'(x)|\leq\frac{1}{2}$$

6) a) On fait une récurrence.

Initialisation : On a $u_0 \in]0;1[$. C'est immédiat.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}, fixé$. On suppose que :

$$0 < u_n < 1 \Longrightarrow f(1) < f(u_n) < f(0)\ (car\ f\ décroissante\ sur\ ]0;1[)$$
$$\Longrightarrow 0 < \frac{1}{e-1} < u_{n+1} < 1$$
$$\Longrightarrow u_{n+1} \in]0;1[$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence !

b) f est continue et dérivable sur $]0;1[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis :

$$\forall (x,y) \in]0;1[^2, x \neq y, \exists\, c_{x,y} \in]0;1[\ tel\ que\ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c_{x,y})$$

Or d'après la question 5 on en déduit que :

$$\forall x \in]0;1[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (x,y) \in]0;1[^2, x \neq y, \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \forall (x,y) \in]0;1[^2, |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

Or on a démontré précédemment à la question 6) a) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0;1[$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|}$$

c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \ln(2)|$$
$$\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times |u_{n-2} - \ln(2)|$$
$$\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times |u_{n-3} - \ln(2)|$$
$$\vdots\ en\ réitérant\ le\ précédé$$
$$\leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \ln(2)|$$

Or on a :

$$e - 1 > 1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \lim_n \left[\frac{1}{2}\right]^n = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$\lim_n |u_n - \ln(2)| = 0$$

Ainsi on a :

$$\boldsymbol{\lim_n u_n = \ln(2)}$$

Exercice 2 : Un résultat bien connu

Cet exercice nous propose une démonstration du résultat suivant :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On définit la suite de polynômes T_n par :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right] \text{ où } i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

1) Calculer $T_0(X)\ et\ T_1(X)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathbb{R}[X]$$

3) Déterminer le degré de T_n.

4) a) Montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$$

b) En déduire le coefficient dominant de T_n

5) a) Rappeler les solutions de $z^n = 1$ sur $\mathbb{C}$.

b) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Démontrer que :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

c) En déduire que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

6) Montrer que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^2\right) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(Indice : on pourra utiliser le coefficient de T_n en X^{2n-2} et le fait que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

8) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \le x \le \tan(x)$$

b) En déduire un encadrement de :

$$\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \; pour\ 1 \le k \le n$$

c) En déduire que :

$$\zeta(2) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1) On a :

$$\boldsymbol{T_0(X) = \frac{1}{2i}[X + i - X + i] = 1}$$

De même on a :

$$T_1(X) = \frac{1}{2i}[(X+i)^3 - (X-i)^3] = \frac{1}{2i}[X^3 + 3iX^2 - 3X - i - (X^3 - 3iX^2 - 3X + i)]$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{2i}(6iX^2 - 2i) = 3X^2 - 1}$$

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{T_n(x)} = -\frac{1}{2i}\left((x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}\right) = T_n(x)$$

Donc $T_n \in \mathbb{R}[X]$.
3) On a :

$$(X+i)^{2n+1} = X^{2n+1} + (2n+1)iX^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} i^{2n+1-k} X^k$$

De même on a :

$$(X-i)^{2n+1} = X^{2n+1} - (2n+1)iX^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} (-i)^{2n+1-k} X^k$$

On a donc :

$$(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} = 2(2n+1)iX^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n+1}{k} \left(i^{2n+1-k} - (-i)^{2n+1-k}\right) X^k$$

Donc on en déduit que :

$$\mathbf{deg(T_n) = 2n}$$

4) a) On a :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right] = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} \left(i^{2n+1-k} - (-i)^{2n+1-k}\right) X^k\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} \left(i^k - (-i)^k\right) X^{2n+1-k}\right)$$

De plus on a :

$$i^n - (-i)^n = e^{\frac{in\pi}{2}} - e^{-\frac{in\pi}{2}} = 2isin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 \; si \; n \; pair \\ (-1)^k \; si \; n = 2k+1 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}}$$

b) On a :

$$T_n(X) = (2n+1)X^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$$

Ainsi le coefficient dominant est $2n+1$

5) a) On a :

$$\boldsymbol{z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!]}$$

b) On a :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z\left(1-e^{i\theta}\right) = -i\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right) \Leftrightarrow -e^{\frac{i\theta}{2}} z \times 2isin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -2icos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

c) On a :

$$T_n(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{X+i}{X-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{X+i}{X-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}; k \in [\![1; 2n]\!]$$

Attention ici $\frac{X+i}{X-i} \neq 1$, donc on doit retirer la solution $k = 0$.
On obtient donc d'après la question précédente :

$$\boldsymbol{X = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}; \; k \in [\![1; 2n]\!]}$$

Vérifions que l'on a bien $2n$ racines !
On a :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

Donc on a n racines entre 0 et n (positive) car tan est bijective sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
De plus :

$$\forall k \in [\![n+1;2n]\!], \frac{k\pi}{2n+1} \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$$

Là encore on a n racines (négative) car tan $\quad est\ bijective\ sur\ \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$.

On a donc $2n$ racines pour T_n polynôme de degré $2n$.On a donc :

$$\boldsymbol{T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)}$$

6) On a :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$
$$= \left[\prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right] \times \left[\prod_{k=1}^{n}\left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)\right]$$

Or on sait que :

$$-\tan(\theta) = \tan(\pi - \theta)$$

On a donc :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

On a donc :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(X + \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=n}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

On en déduit donc que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) On a :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}X^{2n-2k}$$

En pose $Y = X^2$ on obient :

$$P_n(Y) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(Y - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k+1}Y^{n-k}$$

On utilise ensuite le lien **coefficient-racine** pour le terme en Y^{n-1} :

$$-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)!}{3!\,(2n-2)!}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

b) On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} - n$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}=\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{2n(n+1)}{3}$$

On sait que :

$$\forall\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\tan(\theta)=-\tan(-\theta$$

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\tan(\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

8) a) On a :

$$\forall t\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\cos(t)\leq 1\leq 1+\tan^2(t)\Longrightarrow\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\int_0^x\cos(t)\ dt\leq\int_0^x 1\ dt\leq\int_0^x 1+\tan^2(t)\ dt$$

$$\Longrightarrow\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\sin(x)\leq x\leq\tan(x)$$

b) On en déduit donc que :

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\leq\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\leq\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\Longrightarrow\frac{2n(n+1)}{3}\leq\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{n(2n-1)}{3}$$

$$\Longrightarrow\frac{2n^2+2n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{2n^2-n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2$$

Or on a :

$$\lim_{n}\frac{2n^2+2n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2=\frac{\pi^2}{6}=\lim_{n}\frac{2n^2-n}{3(4n^2+4n+1)}\pi^2$$

Exercice 3 : Un peu d'espace vectoriel

On pose :

$$F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ tel\ que\ x+2y-z=0\right\}$$

1) Montrer que F est un espace vectoriel.
2) Déterminer une base de F.
3) On pose :

$$G=vect\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

Montrer que :

$$\mathbb{R}^3=F\oplus G$$

1)
i) $\mathrm{F}\subset\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel
ii) $(0;0;0)\in\mathrm{E}$ donc $\mathrm{E}\neq\emptyset$
ii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2)\in\mathrm{E}^2$ on pose :

$$\mathrm{e}_1=(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1)\text{et }\mathrm{e}_2=(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_2)$$

On a alors :

$$\lambda(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1)+\mu(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_2)=(\lambda\mathrm{x}_1+\mu\mathrm{x}_2,\lambda\mathrm{y}_1+\mu\mathrm{y}_2,\lambda\mathrm{z}_1+\mu\mathrm{z}_2)$$

On en déduit donc que :

$$(\lambda\mathrm{x}_1+\mu\mathrm{x}_2)+2(\lambda\mathrm{y}_1+\mu\mathrm{y}_2)-(\lambda\mathrm{z}_1+\mu\mathrm{z}_2)=\lambda\underbrace{(\mathrm{x}_1+2\mathrm{y}_1-\mathrm{z}_1)}_{=0}+\mu\underbrace{(\mathrm{x}_2+2\mathrm{y}_2-\mathrm{z}_2)}_{=0}$$

$$=0$$

Donc $\lambda e_1 + \mu e_2 \in F$.
Donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$.
Donc F est un $\mathbb{R}-$ ev.
2) On a :

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$F = vect\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Donc $\mathcal{B}$ est **génératrice**.
De plus elle est **libre** car les deux vecteurs ne sont pas indépendants.
C'est donc une base de F.
3) Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On cherche $a, b\ et\ c\ tel\ que$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ 3c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + c \\ y = b + 2c \\ z = a + 2b + 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x - 2y + z}{2} \\ b = -x - y + z \\ c = \dfrac{x + 2y - z}{2} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{x-2y+z}{2} \\ -x-y+z \\ \dfrac{-3x-6y+5z}{2} \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{x+2y-z}{2} \\ x+2y-z \\ \dfrac{3x+6y-3z}{2} \end{pmatrix}}_{\in G}$$

De plus cette décomposition est unique par équivalence !

Remarque : $\left(Sinon\ on\ peut\ montrer\ que\ F \cap G = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\ pour\ l'unicité\right)$

On a donc :

$$\mathbb{R}^3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ tel\ que\ x + 2y - z = 0\right\} \oplus vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Problème 1: Intégration (petites mines 2002)

Dans tout ce problème, on s'intéresse aux fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan(t)}{t}\ si\ t \neq 0 \\ 1\ si\ t = 0 \end{cases} \end{cases} \quad et \quad F: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ \ si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Partie A : Etude de la fonction f

1) Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
2) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de *f*. En déduire que *f* est dérivable et donner la valeur de $f'(0)$.
3) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.
4) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

5) Déterminer le tableau de variation de *f* et tracer l'allure de la courbe représentative de *f*.

Partie B : Etude de la fonction F

1) Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq F(x) \leq 1$$

(On pourra commencer par supposer que $x > 0$).
3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big)$$

4) Prouver que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.
5) Tracer le tableau de variation de F.
6)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

7) Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$x^2y' + xy = \arctan(x)$$

1) Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
2) Montrer que F est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

Partie A : Etude de la fonction f

1) On sait que $t \mapsto \arctan(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$. On en déduit donc que f est continue sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$. Il reste à voir que f est continue en 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = 1$$

On sait que :

$$\arctan(t) = t + o(t) \Longrightarrow \frac{\arctan(t)}{t} = 1 + o(1)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(t)}{t} = \lim_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On sait que :

$$\arctan(t) = t + o(t^2) \Longrightarrow f(t) = \frac{\arctan(t)}{t} = 1 + o(t)$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3) $t \mapsto \arctan(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit. On a :

$$\forall t \neq 0, f'(t) = \frac{\frac{t}{1+t^2} - \arctan(t)}{t^2} = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan(t)}{t^2}$$

4) On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}du = \int_0^t u \times \frac{u}{(1+u^2)^2}du = \left[u \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{1+u^2}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\arctan(t)$$

De plus on sait que :

$$-\frac{1}{2}t^2 f'(t) = -\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\arctan(t)$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2}du = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$$

Remarque : On aurait aussi pu procéder autrement.
On pose :

$$\forall t \neq 0, g(t) = \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du \Longrightarrow g'(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

De plus on pose :

$$\forall t \neq 0, h(t) = -\frac{1}{2}t^2 f'(t) \Longrightarrow h'(t) = -tf'(t) - \frac{1}{2}t^2 f''(t)$$

On montre ensuite que $h'(t) = g'(t)$.
On en déduit donc que :

$$\exists c \in \mathbb{R}, h(t) = g(t) + c$$

Il reste à voir que $c = 0$. On peut le faire en calculant :

$$g(0) = \int_0^0 \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = 0 \text{ et} \lim_{t\to 0} h(t) = 0 \Longrightarrow c = 0$$

5) On sait que :

$$\forall u > 0, \frac{u^2}{1+u^2} > 0 \Longrightarrow \forall t > 0, \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du > 0 \Longrightarrow \forall t > 0, -\frac{1}{2}t^2 f(t) > 0 \Longrightarrow \forall t > 0, f'(t) < 0$$

Donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$.
De plus on a :

$$\forall t \neq 0, f(-t) = \frac{\arctan(-t)}{-t} = \frac{\arctan(t)}{t} = f(t)$$

On en déduit donc que f est paire.
Par parité de f on en déduit donc que f est croissante sur $]-\infty; 0[$.
De plus on sait que :

$$\lim_{t>+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\arctan(t)}{t} = \frac{\pi}{2} \times \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$$

Par parité, on a :

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$$

On a alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On a alors la courbe suivante :

Partie B : Etude de la fonction F

1) Montrons que F est continue sur $\mathbb{R}$. On sait que :
F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus on sait que :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in [-\delta; \delta], 1 - \epsilon \leq f(t) \leq 1 + \epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-\delta; \delta], x \neq 0, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \in \left[\frac{1}{x}\int_0^x (1-\epsilon)\, dt; \frac{1}{x}\int_0^x (1+\epsilon)\, dt\right]$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(1+\epsilon)\,dt = 1+\epsilon$$

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{x}(1-\epsilon)\,dt = 1-\epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [-\delta;\delta], x \neq 0, |F(x)-1| \leq \epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 1 = F(0)$$

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus on a :

$$\forall \mathrm{x} \neq 0, \mathrm{F(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt}$$

On pose le changement de variable $\mathrm{u} = -\mathrm{t}$

i) On change les bornes

$$\begin{cases} \mathrm{t}=0 \\ \quad \text{ou} \\ \mathrm{t}=\mathrm{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{u}=0 \\ \quad \text{ou} \\ \mathrm{u}=-\mathrm{x} \end{cases}$$

ii) On calcule le du

On sait que $\mathrm{t}: \mathrm{u} \mapsto -\mathrm{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{du}} = -1 \Longrightarrow \mathrm{dt} = -\mathrm{du}$

iii) On remplace

$$\mathrm{F(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt} = \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{-\mathrm{x}} \underbrace{\mathrm{f}(-\mathrm{u})}_{=\mathrm{f(u)}\text{ car f est paire}} (-\mathrm{du}) = -\frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{-\mathrm{x}} \mathrm{f(u)du} = \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{-\mathrm{x}}^{0} \mathrm{f(u)du} = \mathrm{F}(-\mathrm{x})$$

On en déduit donc que F est paire.

2) Soit $\mathrm{x} > 0$. On a :

$$\mathrm{F(x)} = \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(t)dt}$$

On sait d'après la partie A, question 5, que :

$$\forall \mathrm{t} \in [0;\mathrm{x}], \mathrm{f(x)} \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{F(x)} \leq \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{\mathrm{x}} 1\mathrm{dt} \leq 1$$

De plus on sait que f est décroissante sur $[0;+\infty[$, on en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{t} \in [0;\mathrm{x}], \mathrm{f(t)} \geq \mathrm{f(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{F(x)} \geq \frac{1}{\mathrm{x}}\int_{0}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)dt} \geq \mathrm{f(x)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} > 0, \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{F(x)} \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} < 0, \mathrm{f}(-\mathrm{x}) \leq \mathrm{F}(-\mathrm{x}) \leq 1$$

Par parité de f et F, on a :

$$\forall \mathrm{x} < 0, \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{F(x)} \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall \mathrm{x} \neq 0, \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{F(x)} \leq 1$$

On sait de plus que $\mathrm{f}(0) = \mathrm{F}(0) = 1$.

3) On sait que :

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

On a démontré à la partie A que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on en déduit donc que $g: x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x)$$

De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$. On en déduit donc que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$ et :

$$\forall x \neq 0, F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big)$$

4) On va calculer $\lim_{x\to 0} F'(x)$.

On démontre que cette limite admet une limite finie, on peut alors en déduire que $F'(0)$ existe et ensuite que F' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

$$F'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big)$$

On sait aussi que :

$$f(x) \leq F(x) \leq 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x) - 1}{x} \leq F'(x) \leq 0$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = 0$$

Donc F' est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

On en déduit même que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

5) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - F(x) \leq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, F'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big) \leq 0$$

Donc F est décroissante sur $[0;+\infty[$.

Par parité on en déduit donc que F' est croissante sur $]-\infty;0]$.

On a donc le tableau de variation suivante :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

6) On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

De plus on sait que f est positive sur $\mathbb{R}$.

On en déduit donc que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in [0;+\infty[, \forall x \geq x_0, f(x) \leq \epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq x_0, 0 \leq F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^{x_0} f(t)dt + \frac{1}{x}\int_{x_0}^x \epsilon dt$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq x_0, 0 \leq F(x) \leq \frac{x_0 F(x_0)}{x} + \frac{x - x_0}{x}\epsilon \leq \frac{x_0 F(x_0)}{x} + \epsilon$$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x_0 F(x_0)}{x} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^+, x_1 \geq x_0, \text{tel que } \forall x \geq x_1, \frac{x_0 F(x_0)}{x} \leq \epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq x_1, 0 \leq F(x) \leq 2\epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$x^2y' + xy = \arctan(x)$$

1) **a) On résout l'équation homogène $x^2y' + y = 0$.**

On sait que :

$$\forall x > 0, x^2y' + xy = 0 \Leftrightarrow y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$$

On pose :

$$a(x) = \frac{1}{x} \text{ donc } A(x) = \ln(x) \text{ est une primitive de a}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, x^2y' + y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$$

De même on a :

$$\forall x < 0, x^2y' + y = 0 \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x < 0, y(x) = \frac{\mu}{x}$$

b) On cherche une solution particulière.

Nous allons utiliser la méthode de la variation de la constante !

On pose :

$$\forall x > 0, y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathcal{C}^1(]0;+\infty[)$$

On a alors :

$$\forall x > 0, y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)x - \lambda(x)}{x^2}$$

Ainsi on obtient :

$$x^2y_p'(x) + xy_p(x) = \lambda'(x)x$$

On en déduit donc que y_p est solution particulière si et seulement si :

$$\lambda'(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

On en déduit donc que :

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

On en déduit donc que :

$$y_p(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,dt$$

Est une solution particulière de $x^2y' + xy = \arctan(x)$ sur $]0;+\infty[$, de même que sur $]-\infty;0[$.

c) On rassemble :

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, x^2y' + xy = \arctan(x) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, y(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,dt$$

De même on a :

$$\forall x < 0, x^2y' + xy = \arctan(x) \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R},, \forall x < 0, y(x) = \frac{\mu}{x} + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,dt$$

2) D'après la question précédente, on sait que F est solution particulière de (E) $(\lambda = \mu = 0)$.
Il reste à montrer que c'est la seule.
Soit f une solution de $x^2y' + xy = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = \frac{\lambda}{x} + F(x)$$

On sait, d'après la question 1 de la partie B, que :

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 0$$

On en déduit donc que si $\lambda \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = +\infty$$

Cela est impossible car f étant solution de (E), f est continue en 0.
On en déduit donc que $\lambda = 0$.
Par un raisonnement identique, on en déduit que $\mu = 0$.
Ainsi F est la seule solution de (E): $x^2y' + xy = \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.