DS n°6
PCSI – 23 mars 2024

On attachera la plus grande importance à la ***clarté*** *et à la* ***précision*** *de la rédaction, ainsi qu'à la* ***propreté*** *de la présentation, et on veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on pourra le signaler sur sa copie et poursuivre la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.*

Les exercices et le problème sont indépendants et peuvent donc être traités dans ***n'importe quel ordre****. Au cours d'un exercice, lorsque l'on ne peut pas répondre à une question, il est* ***vivement recommandé*** *de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.*

La calculatrice est interdite

Exercice 1 : Une suite classique

Dans tout cet exercice on pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} \; si\ x \neq 0 \\ 1\ si\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1) Déterminer le $DL_2(0)$ de f.

2) a) En déduire que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donnera la valeur de $f'(0)$.

b) Etudier la position de f avec sa tangente (notée (T_0)), au point d'abscisse $x = 0$. On fera un graphique pour représenter cette position !

c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

(***Indice*** *: On pourra montrer que* 0 *n'est pas solution de cette équation*).

5) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

6) On pose la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n}-1} \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0;1[$$

b) En déduire que :

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|$$

c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : Un résultat bien connu

Cet exercice nous propose une démonstration du résultat suivant :

$$\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On définit la suite de polynômes T_n par :

$$T_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right] \text{ où } i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

1) Calculer $T_0(X)$ et $T_1(X)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \in \mathbb{R}[X]$$

3) Déterminer le degré de T_n.

4) a) Montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$$

b) En déduire le coefficient dominant de T_n

5) a) Rappeler les solutions de $z^n = 1$ sur $\mathbb{C}$.

b) Soit $\theta \in]0;\pi[$. Démontrer que :

$$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

c) En déduire que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

6) Montrer que :

$$T_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \left(\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^2\right) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

7) a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

(Indice : on pourra utiliser le coefficient de T_n en X^{2n-2} et le fait que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

8) a) Montrer que :

$$\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

b) En déduire un encadrement de :

$$\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \; pour \; 1 \leq k \leq n$$

c) En déduire que :

$$\zeta(2) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque : Ce résultat nous permet, entre autre, de démontrer l'irrationalité de π. Vous trouverez une démonstration dans le prochain problème facultatif du DM n°7.

Exercice 3 : Un peu d'espace vectoriel

On pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; tel \; que \; x + 2y - z = 0 \right\}$$

1) Montrer que F est un espace vectoriel.
2) Déterminer une base de F.
3) On pose :

$$G = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$

4) Décomposer le vecteur $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans cette somme directe.

Problème 1: Intégration (petites mines 2002)

Dans tout ce problème, on s'intéresse aux fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{t} \mapsto \begin{cases} \frac{\arctan(\mathrm{t})}{\mathrm{t}} \text{ si } \mathrm{t} \neq 0 \\ 1 \text{ si } \mathrm{t} = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{x} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{x}} \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt} \text{ si } \mathrm{x} \neq 0 \\ 1 \text{ si } \mathrm{x} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Partie A : Etude de la fonction f

1) Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
2) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de *f*. En déduire que *f* est dérivable et donner la valeur de $\mathrm{f}'(0)$.
3) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $\mathrm{f}'(\mathrm{t})$ pour $\mathrm{t} \in \mathbb{R}^*$.

4) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

5) Déterminer le tableau de variation de *f* et tracer l'allure de la courbe représentative de *f*.

Partie B : Etude de la fonction F

1) Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq F(x) \leq 1$$

(On pourra commencer par supposer que $x > 0$).

3) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big)$$

4) Prouver que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.

5) Tracer le tableau de variation de F.

6) Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$$

7) Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Partie C : Résolution d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$x^2 y' + xy = \arctan(x)$$

1) Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

2) Montrer que F est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.