Programme de colle n°23
(8 au 12 avril)

Espace vectoriel de dimension finie

- Base et dimensión d'un ev de dimension finie
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète
- Rang d'une famille de vecteurs
- Sev supplémentaires

Séries numériques

- Définition de $\sum u_n$ converge avec la convergence de la suite des sommes partielles
- Somme géométrique, exponentielle.
- Somme télescopiques

Séries numériques à termes positifs

- Convergence avec majoration des sommes partielles.
- Convergence ou divergence par comparaison (relation d'ordre, notation de Landau, équivalent)
- Comparaison série-intégrale

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire
- Image et rang d'une application linéaire

Démo de cours

Propriété : La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Propriété :

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n} \sim \ln(n)$$

Propriété II.a.1 : On a l'implication suivante (qui n'est PAS UNE EQUIVALENCE) :

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Propriété : On a :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Exercices du type

Donner la dimension de $S_n(\mathbb{R})$, de $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}, x + 2y + z = 0\right\}$, $\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$, $\{M \in M_n(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$, en donnant une base de ces espaces vectoriels !

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$

Exercice B.8 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}, u_n = \frac{1}{n\ln^3(n)}, u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$$

Exercice B.1 : Montrer que f est linéaire et déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, 2x + 2z) \end{cases}$$