Correction DM n°7

Problème 1: Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie A : Convergence de deux suites

On considère les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \quad et \ v_n = \ln(u_n)$$

1) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
2) En déduire que (v_n) converge.
3) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Calcul de la constante k

Dans cette partie on souhaite prouver que $k = \sqrt{2\pi}$.

On pose la suite $(\mathrm{W_n})$ définie par :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}$$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+2}} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}+2}\mathrm{W_n}$$

b) En déduire que :

$$\forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{2n}} = \frac{(2\mathrm{n})!}{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad et \ \mathrm{W_{2n+1}} = \frac{(2^{\mathrm{n}}\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!} = \frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!}$$

2) Démontrer que la suite nW_nW_{n+1} est constante.
3) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2 \sim \pi$$

4) Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Partie A :

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Or on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n} = e \times \frac{n+1}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \times n^{n+\frac{1}{2}} = e \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

De plus on sait que :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{n}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

2) On sait que :

$$v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

De plus on sait que :

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ *converge car* $2 > 1$ *et on applique le critère de Riemann.*

D'après le théorème de convergence des séries à termes positifs, on en déduit donc que $\left(\sum(v_n - v_{n+1})\right)$ converge.

On a donc :

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = S \in \mathbb{R}^-$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n v_{n+1} = S + v_1$$

Ainsi la suite (v_n) converge.

3) On sait que (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\lim_n \ln(u_n) = \ell$$

Comme ln est continue sur son ensemble de définition, on a :

$$\lim_n u_n = e^{\ell} = k > 0$$

On en déduit donc que :

$$\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \sim k$$

Par produit on a :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie B :

1) a) On a :

$$\forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{\mathrm{n}+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\mathrm{n}+2}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{\mathrm{n}+1}(\mathrm{t})}_{\mathrm{u(t)}}\,\underbrace{\cos(\mathrm{t})}_{\mathrm{v}'(\mathrm{t})}\,\mathrm{dt}$$

On pose :

$$\begin{cases} \mathrm{u(t)} = \cos^{\mathrm{n}+1}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{v}'(\mathrm{t}) = \cos(\mathrm{t}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{u}'(\mathrm{t}) = (\mathrm{n}+1)(-\sin(\mathrm{t}))\cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{v(t)} = \sin(\mathrm{t}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{\mathrm{n}+2} = \underbrace{\left[\cos^{\mathrm{n}+1}(\mathrm{t}) \times \sin(\mathrm{t})\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{n}+1)(-\sin(\mathrm{t}))\cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\sin(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

$$= (\mathrm{n}+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\mathrm{t})\cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = (\mathrm{n}+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(\mathrm{t}))\cos^{\mathrm{n}}(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$$

$$\Longrightarrow \forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{\mathrm{n}+2} = (\mathrm{n}+1)\mathrm{W}_{\mathrm{n}} - (\mathrm{n}+1)\mathrm{W}_{\mathrm{n}+2} \Longrightarrow \boldsymbol{\forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{\mathrm{n}+2} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}+2}\mathrm{W}_{\mathrm{n}}}$$

b) On veut démontrer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 1 : Par récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}"$$

Initialisation :

$$\frac{(0)!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Sit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n.

On a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} &= W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2(n+1)}{2^2(n+1)(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire implique par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boldsymbol{\forall\ n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \forall\ n \in \mathbb{N}, W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} W_{2n-6} \\ &\vdots \text{ On réitère le procédé n fois} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} W_0 \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \dots \times 2} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n \times (n-1) \times \dots \times 1} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n!} \end{aligned}$$

$$= \frac{2n(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{2^n n!\times 2n\times(2n-2)\ldots\times 2}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

On a donc :

$$\forall\, \mathbf{n}\in\mathbb{N}, \mathbf{W_{2n}} = \frac{\mathbf{(2n)!}}{\mathbf{2^{2n}(n!)^2}}\times\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

C'est la même chose que la question a précédente, soit par récurrence ou par itération de la formule de récurrence.
Comme on ne nous donne pas de formule à démontrer, nous allons le faire grâce à la méthode 2.

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

Ainsi on a :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1}$$
$$= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}W_{2n-3}$$
$$= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\frac{2n-4}{2n-3}W_{2n-5}$$
$$\vdots \text{ On réitère le procédé n fois}$$
$$= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}W_1$$

Or on sait que :

$$W_1 = 1$$

De plus on a :

$$\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3} = \frac{2^n n!}{(2n+1)\times(2n-1)\ldots\times 3}$$
$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$
$$\forall\, \mathbf{n}\in\mathbb{N}, \mathbf{W_{2n+1}} = \frac{\mathbf{(2^n n!)^2}}{\mathbf{(2n+1)!}} = \frac{\mathbf{2^{2n}(n!)^2}}{\mathbf{(2n+1)!}}$$

2) On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n \Longrightarrow u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = \mathbf{(n+1)W_{n+1}W_n = u_n}$$

Ainsi la suite **$(\mathbf{u_n})$ est constante**.

3) On sait que :

$$\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0\le\cos(t)\le 1$$
$$\Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}, \forall t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], 0\le\cos^{n+1}(t)\le\cos^n(t)$$
$$\Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}(t)\,dt \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt$$
$$\Longrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N}, 0\le W_{n+1}\le W_n$$

On a donc :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{n+1}\le W_n\le W_{n-1}$$
$$\Longrightarrow 1\le\frac{W_n}{W_{n+1}}\le\frac{W_{n-1}}{W_{n+1}}$$

Or on sait que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathrm{W_{n+1}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\mathrm{W_{n-1}} \Longrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{\mathrm{W_{n-1}}}{\mathrm{W_{n+1}}} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}$$

On a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{\mathrm{W_n}}{\mathrm{W_{n+1}}} \leq \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}}$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$W_n \sim W_{n+1}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{n}+1)\mathrm{W_{n+1}}\mathrm{W_n} = \mathrm{u_0} = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$(n+1)(W_n)^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$(2n+2)(W_{2n+1})^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

Ainsi on a :

$$(2n+1)\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n}+1)!}\right)^2 \sim \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{2}{2n+1}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2 \sim \pi \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \sim \pi}$$

4) On sait que :

$$\pi = \lim_{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)^2$$

Par continuité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ on a :

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(\frac{2^{2\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)^2}{(2\mathrm{n})!}\right)$$

De plus on sait que :

$$n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \times \frac{\mathbf{2^{2n}}\left(k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{\mathbf{2}}}{k\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\pi}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow k = \sqrt{2\pi}}$$

On a ainsi la formule de Stirling :

$$\boldsymbol{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$