Programme de colle n°25
Du 13 au 17 mai

Séries numériques

- Définition de $\sum u_n$ converge avec la convergence de la suite des sommes partielles
- Somme géométrique, exponentielle.
- Somme télescopiques

Séries numériques à termes positifs

- Convergence avec majoration des sommes partielles.
- Convergence ou divergence par comparaison (relation d'ordre, notation de Landau, équivalent)
- Comparaison série-imtégrale
- Critère de Riemann
- Critère de d'Alembert

Séries absolument convergence ou non

- Définition d'une série absolument convergente.
- Toute série absolument convergente converge.
- Critère spécial des séries alternées.
- Développement décimal d'un nombre réel

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire
- Image et rang d'une application linéaire
- Isomorphismes (égalité des dimensions, espaces isomorphes), injectivité et surjection avec l'image et le noyau.
- Homothéties, projecteurs et symétries

Démo de cours

Propriété : La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Propriété :

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n} \sim \ln(n)$$

Propriété : On a :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

- f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$
- f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$. On a alors :
(1)f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F
(2)f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice dans F
(3)f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F

Propriété : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$p \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow pop = p$$

On a plus précisément $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est le projecteur sur Im(p) parallèlement à Ker(p).

Propriété : Soient $E = E_1 \oplus E_2$, $s_{E_1} : E \to E$ la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2. On a alors :

- $sos = \mathrm{Id}_E$.
- $E_1 = \mathrm{Inv}(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$
- $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$