PCSI DM n°8
Mardi 28 mai 2021

Problème : Algèbre

Partie A : Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ −espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieurs ou égaux à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On définit les deux applications suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) \end{cases}$$

$$\phi: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ en indiquant les calculs intermédiaires.
3) f est-elle injective ? Surjective ?
4) Montrer que ϕ est linéaire.
5) Déterminer la dimension et une base de $\ker(\phi)$.
6) ϕ est-elle injective ? Surjective ?

Partie B : Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

On note enfin $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par :

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1)$$

1) Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Ecrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, noté $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P$.
3) Justifier que P est inversible et calculer son inverse.
4) Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
5) Calculer M^n pour tout entier naturel n.
6) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PM^nP^{-1}$$

7) On pose $P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $f^n(P)$ en fonction de a_0, a_1, a_2.

8) Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)dt$$

Partie C : Une autre preuve du résultat précédent

1) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

2) En déduire à l'aide d'un résultat du cours que l'on énoncera avec précision que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \lim_n \phi\big(f^n(P)\big) = \int_0^1 P(t)dt$$

Partie D : Une fonction complexe

On pose :

$$g:\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z+|z|}{2} \end{cases}$$

De plus on pose la suite définie par :

$$\begin{cases} z_0 \in \mathbb{C}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = g(z_n) \end{cases}$$

1) g est-elle linéaire ?

2) On pose pour tout entier naturel n, $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n)\,, avec\ \theta_n \in]-\pi;\pi]$.

 a) Exprimer r_{n+1} en θ_{n+1} en fonction de r_n et de θ_n.

 b) En déduire la valeur de $\lim_n \theta_n$.

3) a) Etudier la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\ avec\ \theta = \arg(z_0) \in]-\pi;\pi]$$

 b) En déduire la limite de r_n puis celle de z_n.