

Programme de colle n°28
(25 mai au 28 mai)

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire
- Image et rang d'une application linéaire
- Isomorphismes (égalité des dimensions, espaces isomorphes), injectivité et surjection avec l'image et le noyau.
- Homothéties, projecteurs et symétries

Matrices d'une application linéaire

- Matrice d'une application linéaire, d'un vecteur
- Endomorphismes, isomorphismes et matrices de changement de bases.
- Application linéaire canoniquement associée
- Noyau et image d'une matrice

Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble
- Cardinal d'une sous-partie d'un ensemble fini E
- Principe des tiroirs, fonctions injectives, surjectives et cardinal
- Combinaison et arrangement

Démo de cours

Propriété : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$p \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow p \circ p = p$$

On a plus précisément $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Propriété : Soient $E = E_1 \oplus E_2$, $s_{E_1} : E \rightarrow E$ la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2 . On a alors :

- $s \circ s = \text{Id}_E$.
- $E_1 = \text{Inv}(s) = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$
- $E_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

Propriété :

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}$$

Exercices de cours

- _ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée
- _ Savoir écrire une application linéaire lorsque l'on connaît sa matrice dans une base donnée.

Exercice A.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer l'expression de f .
- 2) Calculer f^2 . En déduire que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- 3) Déterminer $\text{rg}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f))$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f .
- 4) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 telle que :

$$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice A.2 : Déterminer le nombre de diviseur de 1800.

Exercice A.3 : Combien y-a-t-il de façon de ranger n objets dans p tiroirs sachant qu'un tiroir peut contenir autant d'objet que l'on veut ?