

Chapitre 27 : Déterminant
Partie B : Matrices inversibles et déterminant - automorphisme

I) Un déterminant non nul

a) Une CNS

Propriété I.a.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Application I.a.2 : Montrer que la matrice suivante est inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Application I.a.3 : Démontrer que $\mathcal{B} = (1 + X + X^2, X^2, 1 + 3X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Application I.a.4 : Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_3 + a_1) \\ \cos(a_1 + a_2) & \cos(a_2 + a_2) & \cos(a_3 + a_2) \\ \cos(a_1 + a_3) & \cos(a_2 + a_3) & \cos(a_3 + a_3) \end{vmatrix}$$

II) Déterminant d'un produit et de la transposée

a) Déterminant du produit

Propriété II.a.1 : Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

En particulier si A est inversible on a :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Application II.a.2 : Démontrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $\det(P_{\mathcal{B}_C, \mathcal{B}})$ et $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_C})$.

Application II.a.3 : On a :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \det(A^p) &= \det(A)^p \\ \det(PAP^{-1}) &= \det(A) \end{aligned}$$

Remarque : On a

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B) = \det(B \times A)$$

Alors qu'en général on a $A \times B \neq B \times A$

b) Transposée

Propriété II.b.1 : On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) = \det(A^T)$$

Remarque : Les propriétés du déterminant, valable sur les colonnes, le sont également sur les lignes d'une matrice.

Application II.b.2 : Calculer le déterminant de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

III) Développement par rapport aux lignes ou aux colonnes

a) Un 1 et que des zéros

Propriété III.a.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ A \mapsto \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0_{n-1,1} & A \end{vmatrix} \end{cases}$$

Alors $f = \det$

Application III.a.2 : Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Application III.a.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

b) Déterminant et mineur

Définition : Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on appelle mineur d'indice (i,j) , noté $\Delta_{i,j}$, le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en rayant dans M la ligne i et la colonne j .

Exemple III.b.1 : On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer $\Delta_{2,3}$.

$$\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 1 \times 1 = 2$$

Exemple III.b.2 : On pose : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\Delta_{4,3}$

Propriété III.b.3 : Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut calculer le déterminant de A :

- Par développement par rapport à la j -ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

- Par développement par rapport à la i -ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Application III.b.4 : Calculer le déterminant de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

IV) Déterminant d'un endomorphisme

a) Invariance par changement de base

Propriété IV.a.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit B et B' deux bases de E . On a alors :

$$\det(\text{mat}_B(f)) = \det(\text{mat}_{B'}(f))$$

Application IV.a.2 : Calculer le déterminant de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle déterminant de f , noté $\det(f)$, le déterminant de f dans n'importe quelle base de E .

Exemple IV.a.3 : Calculer le déterminant que :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{cases}$$

Exemple IV.a.4 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P + XP' \end{cases}$$

Calculer le déterminant de f .

Exemple IV.a.5 : Soit φ l'application qui, à tout polynôme réel P de degré inférieur ou égal à 2, associe Q défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et calculer $\det(\varphi)$.

b) Conséquence

Propriété IV.b.1 : Soit p la projection sur E_1 parallèlement à $E_2 \neq \{0_E\}$. On a alors :

$$\det(p) = 0$$

Propriété IV.b.2 : Soit s la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2 . On a alors :

$$\det(s) = (-1)^{\dim(E_2)}$$

Propriété IV.b.3 : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. On a :

$$(1) \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$$

$$(2) f \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow \det(f) \neq 0$$

On a alors :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

Application IV.b.4 : Déterminer si l'endomorphisme suivant est un automorphisme :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{cases}$$