

## Chapitre 27 : Déterminant

### Partie A : Déterminant d'une matrice

Dans tout ce chapitre on pose  $\mathbb{K}$  l'ensemble des nombres réels ou complexes,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $n \geq 2$ .

#### I) Forme multilinéaire alternée

##### a) Définition

**Définition/propriété I.a.1 (Forme multilinéaire alternée) :** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une unique application  $\Phi: E^n \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

- $\Phi$  est multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ces variables :  

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in E^n, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, X \mapsto \Phi(f_1, \dots, f_{j-1}, X, f_{j+1}, \dots, f_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$$
- $\Phi$  est alternée :  

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in E^n, \forall 1 \leq i < j \leq n, f_i = f_j \Rightarrow \Phi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n) = 0$$
- $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$

$\Phi$  est alors appelé le déterminant dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , noté  $\det_{\mathcal{B}}: E^n \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Exemple I.a.2 :** On pose :

$$\mathcal{A}: \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\} \mapsto ad - bc$$

Alors  $\mathcal{A} = \det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^2)}$ .

**Propriété I.a.3 :** Si  $f$  est une forme multilinéaire (on parle aussi de forme  $n$ -linéaire) sur  $E^n$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$f = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}$$

**Propriété I.a.4 (déterminant entre deux bases) :** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On a alors :

$$\forall (f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F} \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

##### b) Opérations et premiers calculs

**Propriété I.b.1 (Opérations sur le déterminant) :** On a :

1) Si  $(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F}$  contient  $O_E$  alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = -\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, f_n))$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i + \lambda \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = \det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) \quad (i \neq j)$$

**Application I.b.2 :** Calculer :

$$\det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

**Application I.b.3** : Calculer :

$$\det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**Application I.b.4** : Calculer :

$$\det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^4)} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**Proposition I.a.7 (Caractérisation des bases par le déterminant) :**

$$\mathcal{F} \text{ base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

## II) Déterminant d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

### a) Les colonnes associées à des vecteurs

**Définition** : Soit  $A = (C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On peut associer alors chaque colonne  $C_i$  à un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  exprimé dans la base canonique :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, C_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x_i)$$

On peut alors définir le déterminant de  $A$ , noté  $\det(A)$  par :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_c}(x_1, \dots, x_n)$$

On utilise alors une **notation particulière**.

**Exemple II.a.1** : Calculer :

$$\det \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

### b) Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

**Propriété II.b.1** : On a :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

**Application II.b.2** : Calculer  $\mathcal{A}_{\mathcal{B}_c} \left( \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right)$

**Propriété II.b.3** : On a :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

**Remarque** : On appelle cela la règle de Sarrus !

**Application II.b.4** : Montrer que la famille  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### c) Cas particuliers des matrices triangulaires

**Propriété II.c.1** : Soit  $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire. On a alors :

$$\det(T) = t_{1,1} \times t_{2,2} \times \dots \times t_{n,n} = \prod_{i=1}^n t_{i,i}$$

**Exemple II.c.2**: Calculer :

$$\det \left( \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 125 \\ 0 & 4 & 120 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

**Remarque** : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut donc appliquer un pivot de Gauss (pour l'instant sur les colonnes) pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure ! Attention toutefois à la valeur des pivots !

**Application II.c.3** : Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$